**Exercícios Espaços vetoriais**

1. Considere os vetores $\mathbf{x_1} = (8 , 6)^T$ e $x_2 = (4 , -1)^T$ em $\mathbb{R}^2$.
(a) Encontre o comprimento de cada vetor.
(b) Seja $x_3 = x_1 + x_2$. Determine o comprimento de $x_3$. Qual a relação entre seu comprimento e a soma dos comprimentos de $x_1$ e $x_2$?
(c) Desenhe um gráfico ilustrando como $x_3$ pode ser construído geometricamente usando $x_1$ e $x_2$. Use esse gráfico para dar uma interpretação geométrica da sua resposta em (b).

2. Repita o exercício 1 para os vetores $x_1 = (2 , 1)^T$ e $x_2 = (6 , 3)^T$.

3. Seja *C* o conjunto dos números complexos. Defina a soma em *C* por
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
e defina a multiplicação por um escalar por
$$\alpha(a+bi)=\alpha a+\alpha bi$$
Para todos os números reais $\alpha$. Mostre que *C* é um espaços vetoriais em relação a essas operações.

4. Mostre que $R^{mxn}$, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar, satisfaz os oito axiomas de espaços vetoriais.

5. Mostre que $C[a,b]$, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar, satisfaz os oito axiomas de espaços vetoriais.

6. Seja *P* o conjunto de todos os polinômios. Mostre que *P*, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar para funções, forma um espaço vetorial.

7. Mostre que o elemento 0 de um espaço vetorial é único.

8. Sejam x, y e z vetores de um espaço vetorial V. Mostre que, se **x** + **y** = **x** + **z** então **y** = **x.**

9. Seja *V* um espaço vetorial e seja x $\in V$. Mostre que:
(a) $\beta 0 = 0$ para todos os escalares $\beta$;
(b) se $\alpha x = 0$, então $\alpha$ = 0 ou x = 0.

10. Seja *S* o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Defina a multiplicação por um escalar e a soma em *S* por
$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$
Usando o símbolo $\oplus$ para denotar a soma nesse sistema para evitar confusão com a soma usual de x + y de vetores linhas. Mostre que *S*, junto com a multiplicação

usual por um escalar e a operação $\oplus$, não é um espaço vetorial. Quais dos oito axiomas não são válidos?

11. Seja $V$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais com a soma definida por
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
e a multiplicação por um escalar definida por
$$\alpha \circ (x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$
Como a multiplicação por um escalar é definida de maneira diferente da usual, usamos um símbolo diferente para evitar confusão com a multiplicação usual de um vetor linha por um escalar. $V$ é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

12. Denote por $R^+$ o conjunto dos números reais positivos. Defina a operação de multiplicação por um escalar por
$$\alpha \circ x = x^\alpha$$
Para cada $x \in R^+$ e para cada número real $\alpha$. Defina a operação de soma por
$$x \oplus y = x \cdot y \text{ para todos } x, y \in R^+$$
Então, para esse sistema, o produto do escalar – 3 por $1/2$ é dado por
$$-3 \circ \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$
e a soma de 2 com 5 é dada por
$$2 \oplus 5 = 2 \cdot 5 = 10$$
$R^+$ é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

13. Seja $R$ o conjunto de todos os números reais. Defina a multiplicação por um escalar por
$$\alpha x = \alpha \cdot x \qquad \text{(a multiplicação usual de números reais)}$$
e a soma, denotada por $\oplus$, por
$$x \oplus y = \max(x, y) \qquad \text{(o máximo entre dois números)}$$
$R$ é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

14. Denote por Z o conjunto de todos os números inteiros com a soma definida da maneira usual e a multiplicação por um escalar definida por
$$\alpha \circ k = [\![\alpha]\!] \cdot k \qquad \text{para todos } k \in Z$$
onde $[\![\alpha]\!]$ denota o maiôs inteiro menor ou igual a $\alpha$. Por exemplo,
$$2{,}25 \circ 4 = [\![2{,}25]\!] \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$$
Mostre que Z não é um espaço vetorial em relação a essas operações. Quais dos axiomas não são válidos?

15. Denote por S o conjunto de todas as seqüências infinitas de números reais com a multiplicação por um escalar e a soma definida por

$$\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$$
$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

Mostre que S é um espaço vetorial.

16. Podemos definir uma bijeção entre os elementos de $P_n$ e de $R^n$ por
$$p(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)^T = \mathrm{a}$$
Mostre que, se $p \leftrightarrow \mathrm{a}$ e $\mathrm{q} \leftrightarrow \mathrm{b}$, então
(a) $\alpha\, p \leftrightarrow \alpha\, \mathrm{a}$ qualquer que seja o escalar $\alpha$ ;
(b) $p + q \leftrightarrow \mathrm{a} + \mathrm{b}$ .

**Exercícios Subespaços:**

1. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^2$.

(a) $\{(x_1, x_2)^T / x_1 + x_2 = 0\}$
(b) $\{(x_1, x_2)^T / x_1 \cdot x_2 = 0\}$
(c) $\{(x_1, x_2)^T / x_1 = 3x_2\}$
(d) $\{(x_1, x_2)^T / x_1 = 3x_2 + 1\}$

2. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^3$.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T / x_1 + x_3 = 1\}$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T / x_1 = x_2 = x_3\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3)^T / x_3 = x_1 + x_2\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3)^T / x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$

3. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^{2 \times 2}$.

   (a) O conjunto de todas as matrizes diagonais 2 x 2.
   (b) O conjunto de todas as matrizes triangulares inferiores 2 x 2.
   (c) O conjunto de todas as matrizes A 2 x 2 tais que $a_{12} = 1$.
   (d) O conjunto de todas as matrizes B 2 x 2 tais que $b_{11} = 0$.
   (e) O conjunto de todas as matrizes simétricas 2 x 2.
   (f) O conjunto de todas as matrizes singulares 2 x 2.

4. Determine o núcleo de cada uma das matrizes a seguir.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

5. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $P_4$. (Cuidado!)

   (a) O conjunto dos polinômios em $_4$ de grau par.
   (b) O conjunto dos polinômios de grau 3.
   (c) O conjunto dos polinômios p(x) em $P_4$ tais que p(0) = 0.
   (d) O conjunto dos polinômios em $P_4$ que tem pelo menos uma raiz real.

6. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de C[-1 , 1].

   (a) O conjunto das funções *f* em *C*[-1 , 1] tais *f* (-1) = *f* (1).
   (b) O conjunto das funções ímpares em C[-1 , 1].
   (c) O conjunto das funções não decrescentes em [-1 , 1].
   (d) O conjunto das funções em *f* em C [-1 , 1] tais *f* (-1) = 0 e *f* (1) = 0.
   (e) O conjunto das funções *f* em C [-1 , 1] tais *f* (-1) = 0 ou *f* (1) = 0.

7. Mostre que $C^n[a , b]$ é um subespaço de C[a , b].
8. Seja A um vetor particular em $R^{2 \times 2}$. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^{2 \times 2}$.

(a) $S_1 = \{B \in R^{2x2} \,/\, AB = BA\}$
(b) $S_2 = \{B \in R^{2x2} \,/\, AB \neq BA\}$
(c) $S_3 = \{B \in R^{2x2} \,/\, BA = 0\}$

9. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um conjunto gerador para $R^2$.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ (c) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ (e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

10. Quais dos conjuntos a seguir são ou não conjuntos geradores para $R^3$? Justifique suas respostas.

    (a) $\{(1 , 0 , 0)^T, (0 , 1 , 1 )^T, (1 , 0 , 1)^T\}$

    (b) $\{(1 , 0 , 0)^T, (0 , 1 , 1 )^T, (1 , 0 , 1)^T, (1 , 2 , 3)^T\}$

(c) $\{(2, 1, -2)^T, (3, 2, -2)^T, (2, 2, 0)^T\}$
(d) $\{(2, 1, -2)^T, (-2, -1, 2)^T, (4, 2, -4)^T\}$
(e) $\{(1, 1, 3)^T, (0, 2, 1)^T\}$

11. Sejam

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $x \in [\{x_1, x_2\}]$ ?
(b) $y \in [\{x_1, x_2\}]$ ?

12. Quais dos conjuntos a seguir são conjuntos geradores para $P_3$? Justifique suas respostas.

(a) $\{1, x^2, x^2 - 2\}$
(b) $\{2, x^2, 2x + 3\}$
(c) $\{x + 2, x + 1, x^2 - 1\}$
(d) $\{x + 2x, x^2 - 1\}$

13. Em $R^{2 \times 2}$, sejam

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que $E_{11}$, $E_{12}$, $E_{21}$, $E_{22}$ geram $R^{2 \times 2}$.

14. Seja S o espaço vetorial das seqüências infinitas definido no exercício 15 da seção1. Seja $S_0$ o conjunto das seqüências $\{a_n\}$ tais que $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Mostre que $S_0$ é um subespaço de S.

15. Prove que, se S é um subespaço de $R^1$, então S = {0{ ou S = $R^1$.

16. Seja A uma matriz n x n. prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $N(A) = \{0\}$:
(b) $A$ é invertível:
(c) Para cada $b \in R^n$, o sistema Ax = b tem uma única solução.

17. Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. prove que $U \cap V$ também é um subespaço de W.

18. Seja S o subespaço de $R^2$ gerado por $e_1$ e seja T o subespaço de $R^2$ gerado por $e_2$. $S \cup T$ é um subespaço de $R^2$? Explique.

19. Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. defina

$$U + V = \{z/\ z = u + v \text{ onde } u \in U \text{ e } v \in V\}$$

Mostre que U + V é um subespaço de W.

**Exercícios Independência linear**

1. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independente em $R^2$.

$(a)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad (b)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$(c)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad (d)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$(e)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Determine se os vetores são ou não linearmente independentes em $R^3$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad$ (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Descreva geometricamente o espaço gerado por cada um dos seguintes vetores no exercício 2.
4. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independente em $R^{2 \times 2}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. Determine se os vetores dados são não linearmente independentes em $P_3$.

$$(a)\ 1, x^2, x^2 - 2 \qquad (b)\ 2, x^2, x, 2x + 3$$
$$(c)\ x + 2, x + 1, x^2 - 1 \qquad (d)\ x + 2, x^2 - 1$$

6. Mostre que os vetores dados são linearmente i8ndependentes em C [0 , 1].

$$(a)\ \cos \pi x, sen\, \pi x \qquad (b)\ x^{3/2}, x^{5/2}$$
$$(c)\ 1, e^x + e^{-x}, e^x - e^x \qquad (d)\ e^x, e^{-x}, e^{2x}$$

7. Determine se os vetores cos x, 1 , sen$^2$ (x/2) são linearmente independentes em $C[-\pi, \pi]$.

8. Considere os vetores cos $(x + \alpha)$ e sen $x$ em $C[-\pi, \pi]$. Para que valores de $\alpha$ os dois vetores vão ser linearmente dependentes? Interprete graficamente sua resposta.

9. Dadas as funções 2x e /x/ , mostre que:

(a) esses dois vetores são linearmente independentes em C[-1 , 1;
(b) esses dois vetores são linearmente independentes em C [0 , 1].

10. Prove que qualquer conjunto finito de vetores contendo o vetor nulo tem que ser linearmente dependente.

11. Sejam $v_1$ e $v_2$ dois vetores em um espaço vetorial V. Mostre que $v_1$ e $v_2$ são linearmente dependentes se e somente se um dos vetores é múltiplo do outro.

12. Prove que qualquer subconjunto não-vazio de um conjunto linearmente independente de vetores $\{v_1, ..., v_n\}$ também é linearmente independente.

13. Seja A uma matriz m x n. Mostre que, se os vetores colunas de A são linearmente independentes então N(A) = {0}.

(***Sugestão:*** para todo $x \in R^n$, $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$)

14. Sejam $x_1, ..., x_k$ vetores linearmente independentes em $R^n$ e seja A uma matriz invertível em m x n.Defina $y_i = Ax_i$ para i = 1, ..., k. Mostre que $y_1, ..., y_k$ são linearmente independentes.

15. Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ um conjunto gerador para o espaço vetorial V e seja v um outro vetor qualquer em V. Mostre que v, $v_1, ..., v_n$ são linearmente independentes.]sejam

$v_1, v_2, ..., v_n$ vetores linearmente independentes em um espaço vetorial V. Mostre que $v_2, ..., v, v_1, ..., v_n$ não podem gerar V.

**Exercícios Base e dimensão:**

1. Indique se os vetores dados no Exercício 1 da seção 3 formam ou não base para $R^2$.

2. Indique se os vetores dados no Exercício 2 da seção 3 formam ou não uma base para $R^3$.

3. Considere os vetores

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $x_1$ e $x_2$ formam uma base para $R^2$.
(b) Por que $x_1, x_2, x_3$ têm que ser linearmente dependente?
(c) Qual a dimensão de $[\{x_1, x_2, x_3\}]$?

4. Considere os vetores

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Qual a dimensão de $[\{x_1, x_2, x_3\}]$?

5. Considere

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $x_1, x_2, x_3$ são linearmente dependentes.
(b) Mostre que $x_1, x_2$ são linearmente independentes.
(c) Qual a dimensão de $[\{x_1, x_2, x_3\}]$?
(d) Descreva geometricamente $[\{x_1, x_2, x_3\}]$.

6. Alguns dos conjuntos do exercício 2 da seção 2 formam subespaços de $R^3$. em cada um desses casos, encontre uma base para o subespaço e determine sua dimensão.

7. Encontre uma base para o subespaço S de $R^4$ formado por todos os vetores da forma $(a + b, a – b + 2c, b , c)^T$, onde a, b, c são números reais. Qual a dimensão de S?

8. Considere os vetores $x_1 = (1, 1, 1)^T$ e $x_2 = (3, -1, 4)_T$.

(a) $x_1$ e $x_2$ geram $R^3$? Explique.

(b) Seja $x_3$ um terceiro vetor em $R^3$ e defina $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Que condição (ou condições) X tem que satisfazer para que $x_1, x_2, x_3$ formem uma base para $R^3$?
(c) Encontre um terceiro vetor $x_3$ que estenda o conjunto $\{x_1, x_2\}$ a uma base para $R^3$.

9. Os vetores

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geram $R^3$. Retire algum (ou alguns) elementos de $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ de modo a obter uma base para $R^3$.

10. Seja S o subespaço de $P_3$ formado por todos os polinômios da forma $ax^2+bx+2a+3b$. Encontre uma base para S.

11. Alguns dos conjuntos do Exercício 3 da seção 2 formavam subespaços de $R^{2 \times 2}$. Em cada um desses casos, Encontre uma base para o subespaço e determine sua dimensão.

12. Encontre a dimensão o subespaço gerado por 1, cos 2x, $\cos^2 x$ em $C[-\pi, \pi]$.

13. Encontre a dimensão do subespaço $P_3$ gerado pelos vetores dados em cada um dos itens a seguir.

(a) $x$, $x - 1$, $x^2 + 1$
(b) $x$ , $x - 1$ , $x^2 + 1$ , $x^2 - 1$
(c) $x^2$ , $x^2 - x - 1$ , $x + 1$
(d) $2x$ , $x - 2$

14. 14. Seja S o subespaço de $P_3$ formado por todos os polinômios p(x) satisfazendo p(0) = 0, e seja T o subespaço de todos os polinômios q(x) tais que q(1) = 0. encontre bases para
(a) S (b) T (c) $S \cap T$

15. Seja U o subespaço de $r_4$ formado pelos vetores da forma $(u_1, u_2, 0, 0)^T$ e seja V o subespaço de todos os vetores da forma $(0, v_2, v_3, 0)^T$. quais as dimensões de U, V, $U \cap V$, U + V? Encontre uma base para cada um desses subespaços.

16. É possível encontrar um par de subespaços bidimensionais U e V de $R^3$ tais que $U \cap V = \{0\}$? Justifique sua resposta. Interprete geograficamente sua conclusão.

[**Sugestão**: sejam $\{u_1, u_2\}$ e $\{v_1, v_2\}$ bases para U e V, respectivamente; mostre que $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ São linearmente dependentes.]

**Exercícios Mudança de base**

1. Para um dos itens a seguir, encontre a matriz que corresponde à mudança de base $[U_1, u_2]$ para a base $[e_1, e_2]$.

(a) $u_1 = (1, 1)^T$, $u_2 = (-1, 1)^T$
(b) $u_1 = (1, 2)^T$, $u_2 = (2, 5)^T$
(c) $u_1 = (0, 1)^T$, $u_2 = (1, 0)^T$

2. Para cada uma das bases coordenadas $[u_1, u_2]$ no Exercício 1, encontre a matriz mudança de base de $[e_1, e_2]$ para $[u_1, u_2]$.

3. Sejam $v_1 = (3, 2)^T$ e $v_2 = (4, 3)^T$. para cada uma das bases ordenadas $[u_1, u_2]$ no Exercício 1, encontre a matriz mudança de base de $[v_1, v_2]$ para $[u_1, u_2]$.

4. Seja $E = [(5, 3)^T, (3, 2)^T]$ e sejam $x = (1, 1)^T$, $y = (1, -1)^T$ e $z = (10, 7)^T$. Encontre os vetores de coordenadas$[x]_E$, $[y]_E$ e $[z]_E$.

5. Sejam $u_1 = (1, 1, 1)^T$, $u_2 = (1, 2, 2)^T$ e $u_3 = (2, 3, 4)^T$.

(a) Encontre a matriz mudança de base de $[e_1, e_2, e_3]$ para $[u_1, u_2, u_3]$.
(b) Encontre as coordenadas de cada um dos vetores a seguir em relação a $[u_1, u_2, u_3]$.

(i) $(3, 2, 5)^T$ (ii) $(1, 1, 2)^T$ (iii) $(2, 3, 2)^T$

6. Sejam $v_1 = (4, 6, 7)^T$, $v_2 = (0, 1, 1)^T$e $v_3 = (0, 1,2)^T$ e sejam $u_1$, $u_2$ e $u_3$ os vetores dados no Exercício 5.

(a) Encontre a matriz mudança de base de $[v_1, v_2, v_3]$ para $[u_1, u_2, u_3]$.
(b) Se $x = 2v_1 + 3v_2 – 4v_3$ determine as coordenadas de x em relação a $[u_1, u_2, u_3]$.

7. Considere

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Encontre vetores $w_1$ e $w_2$ tais que S é a matriz mudança de base de $[w_1, w_2]$ para $[v_1, v_2]$.

8. Considere

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre vetores $u_1$ e $u_2$ tais que S é a matriz mudança de base de $[v_1, v_2]$ para $[u_1, u_2]$.

9. Sejam $[x, 1]$ e $[2x – 1 , 2x + 1]$ duas bases ordenadas para $P_2$.

(a) Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas de [2x – 1, 2x + 1] para [x, 1].
(b) Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas de [x, 1] para [2x – 1, 2x + 1].

10. Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas em $P^3$ da base ordenada $[1, x, x^2]$ para a base ordenada

$$[1, 1 + x, 1 + x + x^2].$$

11. Seja $E = [u_1, ..., u_n]$ e $F = [v_1, ..., v_n]$ duas bases ordenadas para $R^n$ e defina

$$U = (u_1, ..., u_n) \text{ e } V = (v_1, ..., v_n)$$

Mostre que a matriz mudança de base de E para F pode ser determinada calculando-se a forma escada reduzida por linhas de (U\V).

**Exercícios Espaço linha e coluna:**

1. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre uma base para o espaço linha, uma base para o espaço coluna e uma base para o núcleo.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Em cada um dos itens a seguir, determine a dimensão do subespaço de $R^3$ gerado pelos vetores dados.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a forma escada reduzida por linhas U de A. Quais os vetores colunas de U que correspondem às variáveis livres? Escreva cada um desses vetores colunas como uma combinação linear dos vetores colunas correspondentes às variáveis líderes.

(b) Quais os vetores colunas de A que correspondem as variáveis lideres de U? Esses vetores colunas formam uma base para o espaço coluna de A. Escreva cada um dos vetores colunas de A como uma combinação linear dos vetores dessa base.

4. Para cada uma das escolhas de A e b a seguir, determine se b pertence ao espaço coluna de A e diga se o sistema Ax = b é ou não compatível.

(a) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

(b) A = $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(d) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(e) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(f) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. Para cada um dos sistemas compatíveis no Exercício 4, examine os vetores colunas da matriz de coeficientes para determinar se o sistema tem uma ou uma infinidade de soluções.

6. Quantas soluções os sistema Ax = b vai ter se b pertencer ao espaço coluna de *A* e se os vetores colunas de *A* forem linearmente independentes? Explique.

7. Seja A uma matriz $m$ x $n$ com $m > n$. Seja b $\in R^m$ e suponha que $N(A) = \{0\}$.

(a) O que você pode concluir sobre os vetores colunas de *A*? Eles são linearmente independentes? Eles geram $R^m$? Explique.

(b) Quantas soluções o sistema $Ax$ = b vai ter se b não pertencer ao espaço coluna de *A*? Quantas soluções o sistema vai ter se b pertencer ao espaço coluna de *A?* Explique.

8. Sejam A e B matrizes 6 X 5. Se dim $N$(A) = 2, qual o posto de A? Se o posto de B for 4, qual vai ser a dim $N$(B)?

9. Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas.

(a) Mostre que a dimensão do espaço coluna de *A* é igual a dimensão do espaço coluna de B.
(b) Os espaços colunas de *A* e *B* são necessariamente iguais? Justifique sua resposta.

10. Prove que um sistema linear Ax = b e compatível se e somente se o posto de (A/b) é igual ao posto de A.

11. Seja *A* uma matriz *m* x *n*.

(a) Se *B é* uma matriz *m* x *m* invertível, mostre que *BA* e A têm o mesmo núcleo e, portanto, o mesmo posto.
(b) Se *C* e uma matriz *n* x *n* invertível, mostre que AC e A tem o mesmo posto.

12. Prove o Corolário 3.6.3.

13. Suponha que A e B são matrizes *m* x *n* com a propriedade de que Ax = Bx para todo x $\in R^n$. Mostre que:

(a) $N(A -B) = R^n$;
(b) A — *B* têm que ter posto nulo e, portanto, A = *B*.

14. Sejam A e B matrizes *n* x *n*. Mostre que *AB* = *O* se e somente se o espaço coluna de B e um subespaço do núcleo de A.

15. Sejam A $\in$ Rm xn, b $\in R^m$ e x0 uma solução particular do sistema Ax = b. Prove as afirmações a seguir.

(a) Um vetor y em $R^n$ é uma solução de Ax = b se e somente se $y = x_0 + z$, onde $z \in N(A)$.
(b) Se $N(A) = (0)$, então a solução $x_0$ é única.

16. Sejam x e y vetores não-nulos em $R^m$ e $R^n$, respectivamente, e seja $A = xy^T$.

(a) Mostre que [x| é uma base para o espaço coluna de A e que $\{y^T\}$ é uma base para o espaço linha de A.
(b) Qual a dimensão de *N(A)*?

17. Sejam A e $R^{m \times r}$, $B \in R^{n \times r}$ e $C$ = AB. Mostre que:

(a) O espaço coluna de C e um subespaço do espaço coluna de *A;*
(b) O espaço linha de C é um subespaço do espaço linha de B;
(c) Posto(C) $\leq$ min{posto(A), posto(B)}.

18. Sejam A $\in R^{m\, xn}$, $B \in R^{n \times r}$ e C = AB. Mostre que:

(a) Se ambos A e B têm vetores colunas linearmente independentes, então os vetores colunas de C também são linearmente independentes.

(b) Se ambos A e B têm vetores linhas linearmente independentes, então os vetores linhas de $C$ também são linearmente independentes.

[***Sugestão***: aplique a parte (a) a $C^T$]

19. Sejam A $R^{n \times r}$ , $B \in R^{n \times r}$ e C = AB. Mostre que:

(a) Se os vetores colunas de $B$ são linearmente dependentes, então os vetores colunas de $C$ também são linearmente dependentes.
(b) Se os vetores linhas de A são linearmente dependentes, então os vetores linhas de $C$ também são linearmente dependentes.

[*Sugestão:* aplique a parte (a) a $C^T$.]

20. Dizemos que uma matriz A m x n tem uma inversa à direita se existe uma matriz C $n$ x $m$ tal que AC = $I_m$. Dizemos que A tem uma *inversa à esquerda* se existe uma matriz $D$ $n$ x $m$ tal que $DA = I_n$.

(a) Mostre que, se $A$ tem inversa à direita, então os vetores colunas de $A$ geram $R^m$.
(b) É possível para uma matriz $m$ x $n$ ter uma inversa à direita se $n < m$? E se $n \geq m$? Explique.

21. Prove que, se $A$ é uma matriz $m \times n$ tal que os vetores colunas de $A$ geram $R^m$, então A tem uma inversa à direita.

[*Sugestão:* denote por $e_j$ a j-ésima coluna de $I_m$ e resolva. Ax = $e_j$ para j= 1, ...,$m$.]

22. Mostre que uma matriz $B$ tem inversa à esquerda se e somente se $B^T$ tem inversa à direita.

23. Seja $B$ uma matriz $n$ x $m$ cujas colunas são linearmente independentes. Mostre que B tem inversa à esquerda.

24. Prove que, se uma matriz B tem inversa à esquerda, então as colunas de B são linearmente independentes.

25. Se uma matriz $U$ esta em forma escada, então os vetores linhas não-nulos formam uma base para o espaço linha de $U$.