PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR

P. FREITAS

Conteúdo

1. Números complexos 2
2. Sistemas de equações; método de eliminação de Gauss 2
3. Operações com matrizes 3
4. Inversão de matrizes 4
5. Característica e núcleo de matrizes 5
6. Espaços lineares 6
7. Bases e dimensão 7
8. Transformações lineares 8
9. Produto interno 9
10. Determinantes 11
11. Valores próprios 12
12. Transformações simétricas, hermitianas e unitárias 14
13. Formas quadráticas 15

"Is it fun to solve problems, and is solving problems about something a good way to learn something? The answer seems to be yes, provided the problems are neither too hard nor too easy."
Paul Halmos, in *Linear algebra problem book*.

1. Números complexos

1.1. Escreva os seguintes números complexos sob a forma $a + bi$:

$$(a)\ \ (2-i)^3;\ \ (b)\ \ \frac{2}{4-3i};\ \ (c)\ \ \frac{1-i}{1+i};\ \ (d)\ \ (-i)^n,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

1.2. Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar:

$$(a)\ \ 2;\ \ (b)\ \ 3i;\ \ (c)\ \ 1-i;\ \ (d)\ \ (1-i)^n,\ \ n\in\mathbb{N};\ \ (e)\ \ \sqrt{1-i};\ \ (f)\ \ \sqrt[3]{i}.$$

1.3. Sendo $z \in \mathbb{C}$, determine expressões em função das partes real e imaginária e do módulo de z para

$$(a)\quad z+\overline{z}\quad (b)\quad z-\overline{z}\quad (c)\quad z\overline{z}$$

1.4. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Prove que

$$(a)\quad |z+w|^2 = |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})\quad (b)\quad |z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$$

1.5. Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:

(a) $\{z\in\mathbb{C} : |z|\le 1\}$.
(b) $\{z\in\mathbb{C} : |z-1+\sqrt{3}i| = 2\}$.
(c) $\{z\in\mathbb{C} : z-\overline{z} = i\}$.
(d) $\{z\in\mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\}$.
(e) $\{z\in\mathbb{C} : z = 1-i+(1+i)t,\ t\in\mathbb{R}\}$.

1.6. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ um polinómio de coeficientes reais — isto é, todos os coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$.
(b) Conclua que se $\lambda = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz de $p(z)$ (isto é, verifica $p(\lambda) = 0$), então $\overline{\lambda} = a - ib$ também o é.
(c) Mostre que se $n = 3$ e p tem uma raiz complexa com parte imaginária não–nula, então p possui três raízes distintas.
(d) Calcule todas as raízes complexas de $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$.

2. Sistemas de equações; método de eliminação de Gauss

2.1. Resolva, pelo método de Gauss, o sistema de equações $Au = b$, para os seguintes pares (A, b) (i denota a unidade imaginária $\sqrt{-1}$):

$$(a)\ A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\qquad (b)\ A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&4\\1&2&3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$(c)\ A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&5&8\\4&-1&-5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\qquad (d)\ A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&5&8\\4&-1&-5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$(e)\ A=\begin{bmatrix}1&2&-1&5\\2&1&-1&3\\4&-1&5&2\\1&1&-1&3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}\qquad (f)\ A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&-1&1&-1&1\\0&1&-1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$(g)\ A=\begin{bmatrix}i&2\\1+i&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}\qquad (h)\ A=\begin{bmatrix}1&1+i&2\\i&i&i\\i&1-i&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1+i\\-(2+i)\end{bmatrix}$$

2.2. Discuta a existência de solução dos seguintes sistemas de equações lineares, em termos dos parâmetros reais α e β:

$$(a)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& -2\\ x-y+z &=& 3\\ x+z &=& 1/2\\ 3x-y+3z &=& \alpha \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{rcl} x+4y+3z &=& 10\\ 2x+7y-2z &=& 10\\ x+5y+\alpha z &=& \beta \end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &=& 0\\ 5x_3+6x_4 &=& 0\\ \alpha x_3+6x_4 &=& \beta\\ x_2+7x_3+8x_4 &=& 1 \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+3x_4 &=& 1\\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4 &=& 2\\ x_1+x_2+3x_3+14x_4 &=& 4\\ 2x_3+\alpha x_4 &=& \beta \end{array}\right.$$

3. Operações com matrizes

3.1. Calcule, sempre que possível, os produtos AB e BA, quando:

$$(a)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2}\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ \sqrt{3} & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\quad (b)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \pi\\ -1\end{bmatrix}$$

$$(c)\ A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & \sqrt[n]{7}\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 4 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad (d)\ A=\begin{bmatrix} 1+i & -4i\\ \alpha i & -i\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -1 & i\\ 2 & 1\\ -i & 1\end{bmatrix}.$$

3.2. Para cada uma das seguintes matrizes obtenha uma expressão para $A^n = A.A.\ldots.A$, $n\in\mathbb{N}$.

$$(a)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad (b)\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\qquad (c)\ C=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(d)\ D=\begin{bmatrix} 0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}\qquad (e)\ E=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad (f)\ F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(g)\ \begin{array}{l} G=\{g_{ij}\},\ \ i,j=1,\ldots,m,\ \text{onde}\\ g_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 1, & j=i+1,\\ 0, & j\neq i+1\end{array}\right.\end{array}\qquad (h)\ H=\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

3.3. Sempre que possível, dê exemplos de matrizes quadradas de entradas reais nas condições indicadas. Caso não seja possível, justifique porquê.

(a) $A^2=0\wedge A\neq 0$ (b) $A^3=0\wedge A^2\neq 0$ (c) $A^n=0\wedge A^{n-1}\neq 0$

(d) $A^2=-I$ (e) $A^3=-I$ (f) $A^4=-I$

(g) $A^4+8A^2+16I=0$

3.4. Sempre que possível, dê exemplos de matrizes quadradas A e B de entradas reais nas condições indicadas. Caso não seja possível, justifique porquê.

(a) $AB=BA\neq 0$ (b) $AB\neq BA$ (c) $AB=0\wedge BA\neq 0$

(d) $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$ (e) $(A+B)^2=A^2+B^2\wedge A,B\neq 0$ (f) $AB=I\wedge BA\neq I$

3.5. Mostre que se $AB=A\wedge BA=B$, então $A^2=A$.

3.6. Seja A uma matriz 2×2 e considere as matrizes

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ \text{e}\ E_2=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que se A comuta com ambas as matrizes E_1 e E_2 ($AE_i=E_iA, i=1,2$), então A é um múltiplo da matriz identidade, ou seja, $A=\alpha I$ para algum $\alpha\in\mathbb{R}$. (Nota: a uma matriz deste tipo chama–se uma matriz escalar, e são as únicas que comutam com todas as ourtas)
(b) Exisitirá alguma matriz M 2×2 tal que se A e M comutam então A é obrigatoriamente uma matriz escalar?
(c) Enuncie e demonstre um resultado semelhante ao da alínea (a) para o caso $n\times n$.

4. Inversão de matrizes

4.1. Determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (b)\ B = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \qquad (c)\ C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \qquad (e)\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (f)\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(g)\ G = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix} \qquad (h)\ H = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ 1+i & -1 & 1 \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix} \qquad (i)\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2. Em que condições uma matriz diagonal $n \times n$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

é invertível, e qual a sua inversa?

4.3. Seja A uma matriz 2×2. Escreva, em função das entradas de A, uma condição necessária e suficiente para que A seja não singular, e determine a expressão da matriz inversa.

4.4. Sendo A e B duas matrizes $n \times n$ invertíveis, diga, justificando, quais das seguintes matrizes são necessariamente invertíveis, indicando nesses casos a expressão da matriz inversa. Nos casos em que a matriz não seja necessariamente invertível, ilustre as diferentes possibilidades por meio de exemplos.

$$(a)\ AB \qquad (b)\ A+B \qquad (c)\ AB^{-1} \qquad (d)\ A^pB^{-q}A^{-p}B^q\ \ (p,q \in \mathbb{N})$$

$$(e)\ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (f)\ \begin{bmatrix} A & B \\ B^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix} \quad (g)\ \begin{bmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (h)\ \begin{bmatrix} A & A+B \\ A & A-B \end{bmatrix}$$

4.5. Mostre que se A_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ são matrizes $m \times m$ invertíveis, então a matriz $B = A_1A_2 \cdots A_n$ também o é, e determine uma expressão para B^{-1}.

4.6. Sendo A e B duas matrizes quadradas $n \times n$, será verdade que se o produto AB se anula, então se tem necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$? O que pode concluir no caso em que A é uma matriz invertível?

4.7. Sejam $A, X \in \mathcal{M}_{n\times n}$, e suponha que A é não singular e que $\operatorname{car}(X) = 1$.

(a) Mostre que existe no máximo um valor real de α para o qual a matriz $B_\alpha = A + \alpha X$ é singular.
(b) Dê um exemplo de matrizes A e X nas condições da alínea anterior para as quais a matriz B_α não seja singular para nenhum valor real de α.

5. Característica e núcleo de matrizes

5.1. Determine a característica e a dimensão do núcleo das seguintes matrizes (nos casos em que a matriz depende do parâmetro α, indique o resultado em função desse parâmetro):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ & & \vdots & \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & n^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & \alpha \\ 1 & 4 & 1 & 2\alpha \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2\alpha-2 & 2+\alpha \\ -1 & -3 & \alpha-2 & -1 \end{bmatrix}$$

5.2. Determine o núcleo (espaço nulo) das seguintes matrizes

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad (b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 8 \end{bmatrix} \quad (e)\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (f)\ F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

5.3. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ uma matriz de entradas reais tal que $\mathrm{car}(A) = 1$.

(a) Mostre que existem vectores $x(m \times 1)$ e $y(1 \times n)$ tais que $A = xy$. Esta decomposição é única? Justifique.
(b) Mostre que se $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, e existem vectores $x(m \times 1)$ e $y(1 \times n)$ tais que $B = xy$, então $\mathrm{car}(B) = 1$
(c) Assuma agora que $m = n$. Mostre que se tem $A^2 = \lambda A$ para algum número real λ, e escreva λ em função dos vectores x e y da decomposição da alínea (a).

5.4. Seja $\mathcal{G}_n$ o subconjunto do espaço $\mathcal{M}_n$ das matrizes reais $n \times n$ formado pelas matrizes não–singulares.

(a) Seja $A \in \mathcal{G}_n$, $B \in \mathcal{M}_n$ e $C = AB$. Mostre que as características das matrizes B e C são iguais.
(b) Mostre que $A, B \in \mathcal{G}_n$ se e só se $AB \in \mathcal{G}_n$.

5.5. Sejam $A \in \mathcal{M}_{l\times m}$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ duas matrizes com características c_A e c_B, respectivamente. Em geral, o que é possível afirmar sobre a característica do produto AB?

5.6. Sejam $A, X \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e suponha que $\mathrm{car}(X) = 1$.

(a) Prove que para todo o número real α se tem

$$\mathrm{car}(A) - 1 \le \mathrm{car}(A + \alpha X) \le \mathrm{car}(A) + 1,$$

e mostre através de exemplos que é possível ter igualdade em qualquer dos casos.
(b) Dadas duas matrizes A e X, será possível que existam números reais α_1 e α_2 para os quais se tenha $\mathrm{car}(A + \alpha_1 X) = \mathrm{car}(A) - 1$ e $\mathrm{car}(A + \alpha_2 X) = \mathrm{car}(A) + 1$? Justifique.

6. Espaços lineares

6.1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são espaços lineares (considere as operações usuais de adição e multiplicação por um número real).

(*a*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$

(*b*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$

(*c*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

(*d*) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$

(*e*) $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0\}$, $c_j \in \mathbb{R},\ \ j = 1,\ldots,n$

(*f*) { Sucessões cujo termo geral satisfaz $u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n = \mathbb{N}_3\}$,

(*g*) Conjunto das matrizes $m \times n$

(*h*) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares superiores

(*i*) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares superiores não singulares

(*j*) Conjunto das matrizes singulares $n \times n$

(*k*) Conjunto das matrizes $n \times n$ que comutam com uma dada matriz $A(n \times n)$

(*l*) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$ (funções pares)

(*m*) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(x + 2\pi)\}$ (funções periódicas de período2π)

(*n*) {polinómios reais $p(x)$ que se anulam em $x = 1$ }

(*o*) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ tem segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0\}$, onde a e b são dois números reais dados

(*p*) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ tem segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = \cos x\}$, onde a e b são dois números reais dados.

6.2. Determine se os seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes ou não. Caso não o sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

(a) Em $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,2,2)$, $u_3 = (1,2,3,3)$ e $u_4 = (1,2,3,4)$.
(b) Em $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (1,0,2)$, $u_3 = (1,2,0)$ e $u_4 = (1,2,2)$.
(c) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1 + t$, $p_3(t) = 1 + t + t^2$ e $p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$.
(d) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1 + t$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^3$ e $p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$.
(e) No espaço das matrizes 2×2,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(f) No espaço das matrizes 2×2,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

7. Bases e dimensão

7.1. Indique, justificando, qual a dimensão dos seguintes espaços lineares, e, no caso de dimensão finita, indique uma base.

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\}$

(c) $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1+x_2=0\}$

(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-z=0 \wedge x-y=0\}$

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-z=0 \wedge x-y=0 \wedge y-z=0\}$

(f) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0 \wedge x-2w=0 \wedge y-z=0\}$

(g) $\{M \in \mathcal{M}_{2\times 2} : m_{11}+m_{22}=0 \wedge m_{12}-m_{21}=0\}$

(h) $\{A \in \mathcal{M}_{3\times 3} : A=-A^t\}$

(i) $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : AX=XA\}$, onde $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(j) Idêntico à alínea anterior, mas agora com $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(k) $\mathcal{M}_{mn}=\{$Matrizes reais $m\times n,$ com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real$\}$

(l) $\{A \in \mathcal{M}_{nn} : A=A^t\}$

(m) $\{A \in \mathcal{M}_{nn} : A=-A^t\}$

(n) Espaço das sucessões de variável real que verificam a relação $\alpha_k=\alpha_{k-1}+2\alpha_{k-2}, k=3,4,\ldots$

(o) Espaço das funções reais de variável real, contínuas, que se anulam nos inteiros

7.2. Seja

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Determine a dimensão dos seguintes espaços lineares, indicando uma base em cada caso:

(a) Espaço nulo de A (b) Espaço das colunas de A (c) Espaço das linhas de A

7.3. Seja V o espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

(a) Diga qual a dimensão de V e indique uma base ordenada. Justifique. Indique as coordenadas do polinómio $(1-t)(1+t)$ nessa base.

(b) Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S=\{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se S é linearmente independente.

(c) Diga qual a dimensão do espaço linear $L(S)$, e determine uma base desse espaço. Justifique.

(d) Seja T o subconjunto de todos os polinómios de V que se anulam em 0. Diga se T é um subespaço linear. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base. Justifique.

7.4. Seja E um espaço linear de dimensão finita n, S_1 e S_2 dois subespaços de E de dimensões n_1 e n_2, respectivamente, e $V = S_1 + S_2$, ou seja, o espaço que se obtém fazendo todas as combinações lineares finitas possíveis de elementos de S_1 e S_2.

(a) Justifique que dado $y \in V$ então existem $x_1 \in S_1$ e $x_2 \in S_2$ tais que $y = x_1 + x_2$.
(b) Mostre que se $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ então cada $y \in V$ determina os vectores x_1 e x_2 da alínea anterior de modo único.
(c) Mostre que se a dimensão de V é $n_1 + n_2$, então $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.
(d) O que pode concluir em relação a $S_1 \cap S_2$ se $n_1 + n_2 > n$? Justifique.

8. Transformações lineares

8.1. Diga, justificando, quais das seguintes transformações $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são lineares. Nesses casos, calcule a matriz que representa a transformação em relação à base dos vectores coordenados unitários.

(a) $T(x, y, z) = (z, x, y)$ (b) $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$
(c) $T(x, y, z) = (x - z, y - z, 0)$ (d) $T(x, y, z) = (0, y, z)$
(e) $T(x, y, z) = (2x - y + 3z, y - 2z, 3z)$ (e) $T(x, y, z) = (x + 1, y - 1, z)$

8.2. Seja $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ uma transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, y - z, x + 2y - z).$$

(a) Calcule a matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbf{R}^3$, e determine o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T, indicando a sua dimensão e uma base.
(b) Determine todas as soluções da equação $T(u) = (1, 0, 1)$.
(c) Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

forma uma base de $\mathbf{R}^3$, e escreve a matriz S de mudança de base da base canónica para $\mathcal{B}$.
(d) Calcule a representação matricial de T em relação à base $\mathcal{B}$.

8.3. Construa, para cada uma das seguintes transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, a matriz que a representa na base canónica:

(a) Reflexão do vector $[x, y, z]^t$ no plano yz.
(b) Rotação do vector $[x, y, z]^t$ por um ângulo θ em torno do eixo yy', no sentido directo quando observado dos yy positivos.
(c) Projecção do vector $[x, y, z]^t$ no plano yz, seguida de uma rotação de $\pi/2$ no sentido dos ponteiros do relógio quando observado do ponto $(1, 0, 0)$.

8.4. Considere, no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ (base canónica) e $\mathcal{B}_2 = \{[-1\ 1\ 1]^t, [-1\ -1\ 1]^t, [0\ 0\ 1]^t\}$.

(a) Determine a matriz S que realiza a mudança de case de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$.
(b) Dado um vector $u = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, isto é, de coordenadas $[x_1\ x_2\ x_3]^t$ na base $\mathcal{B}_1$, determine as suas coordenadas $[y_1\ y_2\ y_3]^t$ na base $\mathcal{B}_2$ **(Sugestão:** Inverta S).
(c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial na base canónica é

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Usando os resultados de (a) e (b), determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_2$.

8.5. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço linear real dos polinómios de grau ≤ 2, e $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(1 + t^2) = 2t, \quad T(t^2) = 2t, \quad T(1 + t) = 1$.

(a) Determine a matriz A que representa T na base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
(b) Determine a matriz B que representa T na base ordenada $\{1,\ 1 + t,\ 1 + t + t^2\}$. Indique a matriz de mudança de base S tal que $B = S^{-1}AS$.

8.6. Seja V o espaço linear das matrizes 2×2 de entradas reais, e S o subespaço de V formado pelas matrizes simétricas, ou seja, as matrizes para as quais $A = A^t$. Seja $T : V \to V$ definida por $T(A) = A - 2A^t$.

(a) Verifique que T é uma transformação linear.
(b) Determine, em relação a uma base de V à sua escolha, a representação matricial de T.
(c) Determine o núcleo de T, e diga, justificando, se T é invertível.
(d) Resolva as alíneas (b) e (c) para a restrição de T a S.

8.7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida em relação à base canónica pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Existem bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ na qual a transformação T é representada por

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine uma dessas bases a partir da relação que conhece entre as matrizes A e B.

8.8. Seja P_n o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a n.
(a) Mostre que a transformação $T : P_3 \to P_3$ definida por

$$T(p) = p'' + ap' + bp,$$

onde a e b são números reais, é uma transformação linear.
(b) Determine a representação matricial para T em relação à base ordenada $\{1, t, t^2, t^3\}$.
(c) Discuta a dimensão do núcleo de T em termos de a e b. Em cada caso, indique uma base para o núcleo.
(d) Utilize os resultados da alínea anterior para determinar as soluções em P_3 da equação diferencial

$$p'' + ap' + bp = 0.$$

(e) Utilize os resultados da alínea (c) para determinar todas as soluções em P_3 da equação diferencial

$$p'' + ap' + bp = 1 - t^2.$$

8.9. Seja V o espaço linear real das matrizes reais de 2×2 de entradas a_{ij} satisfazendo $a_{11}+a_{22} = 0, a_{12}+a_{21} = 0$, e considere as seguintes matrizes de V:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V.
(b) Dada a transformação linear $T : V \to V$ definida através das seguintes relações:

$$T(H) = J \ , \ T(J) = -H$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base contendo H e J.
(c) Determine a característica e a dimensão do núcleo de T, e indique justificadamente se é invertível.
(d) Calcule todas as soluções U da equação linear $T(U) = B$ onde $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$.

8.10. Seja V um espaço linear de dimensão finita n, $B = \{f_1, \ldots, f_n\}$ uma sua base, e $P : V \to V$ uma transformação linear invertível tal que para todo o $i = 1, \ldots, n$ existe j $(1 \le j \le n)$ tal que $P(f_i) = f_j$.
(a) Prove que para cada $i = 1, \ldots, n$ existe um inteiro positivo k_i, menor ou igual que n, tal que $P^{k_i}(f_i) = f_i$.
(b) Prove que existe um inteiro k tal que $P^k = I$, e mostre através de um exemplo que k pode ter de ser tomado maior que n.
(c) Suponha agora que para algum m $(1 \le m \le n)$ se tem $P^j(f_m) \ne f_m$ para $j = 1, \ldots, n-1$. Prove que nestas condições se tem $P^n = I$.
(d) Nas condições da alínea anterior, o que pode dizer quanto aos valores próprios de P?

8.11. Seja V um espaço linear e $T : V \to V$ uma transformação linear.
(a) Mostre que se $T^2 = T$ então $\mathcal{I}(T) \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}$.
(b) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : V \to V$ tal que $\mathcal{I}(T) \cap \mathcal{N}(T) \ne \{0\}$.

9. Produto interno

9.1. Determine o produto interno (usual) entre os seguintes vectores:

(a) $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, -1)$ (b) $(1, 2, 3, 4)$ e $(-4, 3, -2, 1)$ (c) $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$ e $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$

9.2. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ ortogonal (em relação ao produto interno usual) aos vectores $(1, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$,

9.3. Determine um produto interno $\langle \ , \ \rangle$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle (1, 0), (0, 1)\rangle = 2$.

9.4. Seja $\langle \ , \ \rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha = (1, 2)$ e $\beta = (-1, 1)$. Mostre que existe um vector γ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle \alpha, \gamma\rangle = -1$ e $\langle \beta, \gamma\rangle = 3$.

9.5. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores

$$\beta_1 = (1,0,1), \beta_2 = (1,0,-1), \beta_3 = (0,3,4)$$

obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual.

9.6. Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Determine uma base ortonormada para S, em relação ao produto usual de $\mathbb{R}^4$.

9.7. Considere a função $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por

$$\big\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \big\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(a) Verifique que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbf{R}^3$.
(b) Seja $V = L\{(3,4,0)\} \subset \mathbf{R}^3$. Calcule o ponto de V mais próximo (em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$) de $(0,1,0)$.
(c) Determine uma equação cartesiana e uma base ortonormal para o complemento ortogonal de V, em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
(d) Seja $P_V : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a projecção ortogonal de $\mathbf{R}^3$ sobre V. Indique, em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, uma base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ na qual a representação matricial de P_V é dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9.8. Seja $\mathcal{P}_1$ o espaço linear real de polinómios com coeficientes reais de grau menor ou igual um.
(a) Mostre que a função

$$\big\langle a_0 + a_1 x, b_0 + b_1 x \big\rangle = a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1}{2} + \frac{a_1 b_0}{2} + \frac{a_1 b_1}{3}$$

define um produto interno em $\mathcal{P}_1$.
(b) Determine uma matriz A tal que

$$\big\langle a_0 + a_1 x, b_0 + b_1 x \big\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \, a_1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

9.9. Seja V o espaço linear real das matrizes $n \times n$ com coeficientes reais.
(a) Mostre que $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ é um produto interno em V, onde tr é o traço e $B^* = \bar{B}^t$.
(b) Calcule $\langle A, B \rangle$ quando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \cos(7\pi/19) & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Determine uma base ortonormada para o espaço das matrizes 2×2 com traço nulo, em relação ao produto interno dado.
(d) Determine o subespaço ortogonal ao subespaço das matrizes diagonais.

9.10. (a) Escreva uma equação cartesiana do plano perpendicular à recta

$$x - 5 = 2y - 4 = z$$

e que contém o ponto $(5,4,0)$.
(b) Escreva equações cartesianas que definem a recta que é perpendicular ao subconjunto afim definido por $Ax + By + Cz = \sqrt{2}$, com $(A,B,C) \neq (0,0,0)$, e que contém a origem.

9.11. Seja V um espaço euclideano de dimensão n com uma base ortonormal

$$\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}.$$

Dada uma transformação linear $T : V \to V$, mostre que a matriz que representa T em relação à base $\mathcal{B}$ é

$$\big[a_{ij}\big] = \langle T(\beta_j), \beta_i \rangle.$$

9.12. Seja V um espaço linear. Diz-se que uma transformação linear $p : V \to V$ é uma **projecção** se $p^2 = p \circ p = p$.
(a) Seja $p : V \to V$ um projecção. Mostre que a transformação linear dada por $\alpha \mapsto \alpha - p(\alpha)$ é uma projecção.
(b) Seja $W = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$, e seja $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ o produto interno usual. Mostre que existe um projecção $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que a imagem de p é W mas p não é a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre W.

9.13. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a n, munido com um produto interno arbitrário.

(a) Prove que existe uma base $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ ortonormada em relação ao produto interno dado e que verifica grau$(p_k) = k$, $k = 0, \cdots, n$.
(b) Mostre que se $\mathcal{B}' = \{q_0, q_1, \cdots, q_n\}$ também é uma base ortonormada em relação ao produto interno dado e satisfazendo grau$(q_k) = k$, $k = 0, \cdots, n$, então $q_k = \pm p_k$, $k = 0, \cdots, n$.
(c) Dada uma base qualquer de $\mathcal{P}_n$, mostre que é sempre possível definir um produto interno neste espaço em relação ao qual esta base seja ortonormada.
(d) O produto interno da alínea anterior fica definido univocamente? Justifique.

9.14. Seja V um espaço linear sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$ com um produto interno, que se designa por $\langle\ ,\ \rangle$.
(a) Mostre que $\langle 0, \beta\rangle = 0$ qualquer seja $\beta \in V$.
(b) Mostre que se $\langle \alpha, \beta\rangle = 0$ qualquer seja $\beta \in V$, então $\alpha = 0$.
(c) Se $\alpha, \beta \in V$ mostre que $\alpha = \beta$ se e só se $\langle \alpha, \gamma\rangle = \langle \beta, \gamma\rangle$ qualquer seja $\gamma \in V$.

9.15. Seja V um espaço linear real ou complexo. Mostre que se $\langle\ ,\ \rangle_1$ e $\langle\ ,\ \rangle_2$ são produtos internos em V, então $\langle\ ,\ \rangle_1 + \langle\ ,\ \rangle_2$ é um produto interno em V. O conjunto dos produtos internos em V é um espaço linear?

9.16. Determine todos os produtos internos do espaço linear real $\mathbb{R}$ e do espaço linear complexo $\mathbb{C}$.

10. Determinantes

10.1. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 100 \\ 3 & 6 & \frac{1000}{\pi} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ & & \vdots & \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & n^2 \end{bmatrix}$$

10.2. Calcule, justificando, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

onde $A \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $C \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e 0 é a matriz nula $n \times m$.

10.3. Considere a função $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida através do seguinte determinante

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} <u,u> & <u,v> & <u,w> \\ <v,u> & <v,v> & <v,w> \\ <w,u> & <w,v> & <w,w> \end{vmatrix},$$

onde $< \cdot, \cdot >$ designa um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
(a) Calcule $G(u, v, w)$, quando estes vectores formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno considerado.
(b) Mostre que se os vectores u, v e w são linearmente dependentes, então $G(u, v, w) = 0$.
(c) Mostre que G não se altera quando se substitui um dos vectores pela sua soma com um múltiplo de um dos outros vectores.
(d) Justifique que G nao é um determinante de ordem 3.

10.4. Sejam A e B matrizes quadradas reais e α um número real tais que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + \alpha AB$.
(a) Mostre que $\alpha = 2$ se e só se as matrizes A e B comutam.
(b) Mostre que se $\alpha \neq 2$ então pelo menos uma das matrizes A ou B é singular.
(c) Prove que se $\alpha = 1$ e $A, B \neq 0$, então A e B são ambas singulares.

11. Valores próprios

11.1. Determine os valores e vectores próprios das seguintes matrizes

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \alpha & \beta & 27 \end{bmatrix} \quad (d)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

11.2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que possui uma representação matricial

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica. Mostre que T possui uma representação matricial diagonal.

11.3. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios reais de uma varíavel real t de grau menor ou igual 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ que em relação à base $\{1, t, t^2\}$ é representada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os valores próprios e vectores próprios de T.
(b) Diga, justificando, se T possui ou não uma representação matricial diagonal em relação a alguma base de $\mathcal{P}_2$.

11.4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Sabendo que $u_1 = (1, 0, 0, 0, 2)$ e $u_2 = (1, 0, 2, 0, 0)$ são vectores próprios de A, determine todos os valores próprios de A.
(b) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal semelhante a A e uma matriz de mudança de base correspondente.
(c) Quais os valores próprios de A^4? (Sugestão: Não calcule A^4)

11.5. Seja V um espaço euclideano real de dimensão finita e considere uma transformação linear $T : V \to V$ com característica de T igual 1.

(a) Mostre que existe um único escalar λ tal que
$$T^2(v) = T\big(T(v)\big) = \lambda T(v)$$
para qualquer $v \in V$.
(b) Verifique que se $\lambda \neq 1$ então a transformação linear dada por $v \mapsto v - T(v)$ é invertível.

11.6. Seja V um espaço linear de dimensão n, e seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Mostre que existem escalares $c_0, \dots c_{n^2}$ tais que $(c_0, \dots c_{n^2}) \neq (0, \dots 0)$ e $c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{n^2} T^{n^2} : V \to V$ é a transformação nula.

11.7. Seja A uma matriz $n \times n$ com polinómio característico $f(x) = (c_1 - x)^{d_1} \dots (c_k - x)^{d_k} = \det\big(A - xI\big)$. Mostre que $\mathrm{tr}\big(A\big) = c_1 d_1 + \cdots + c_k d_k$.

11.8. Seja A uma matriz $n \times n$ que tem n valores próprios distintos, e B uma matriz $n \times n$ que comuta com A (ou seja, $AB = BA$).

(a) Mostre que se u é um vector próprio de A, então também é um vector próprio de B.
(b) Os valores próprios de B serão necessáriamente distintos? Justifique.
(c) Diga, justificando, se B é diagonalizável.
(d) Seja $M = p_0 I + p_1 A + p_2 A^2 + \cdots + p_m A^m$. Mostre que a matriz M é diagonalizável e indique, em função dos valores próprios de A, uma matriz diagonal Λ semelhante a M.

11.9. Seja W um espaço euclidiano de dimensão finita n e $F : W \to W$ uma transformação linear. Suponha que existe um subespaço linear S de W, tal que $F(S) = S^\perp$.

(a) Prove que $\dim(S) \geq n/2$ e que se F for invertível então $\dim(S) = n/2$.
(b) Mostre, através de exemplos, que se $\dim(S) = n/2$ então F pode ser ou não invertível.
(c) Prove que se se tiver $F(S^{\perp}) = S$ então F é invertível.
(d) Mostre que nas condições da alínea anterior a soma dos valores próprios de F é nula.

11.10. Sejam V um espaço linear real de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear.

(a) Suponha que existe um escalar μ tal que

$$T^2(v) \stackrel{\text{def}}{=} T\big(T(v)\big) = \mu T(v)$$

para todo o $v \in V$. Quais os possíveis valores próprios de T?
(b) Mostre que, nas condições da alínea anterior e se $\mu \neq 1$, então a transformação linear dada por $S(v) = v - T(v)$ é invertível.
(c) Prove que se a característica de T for 1, então existe um escalar μ nas condições da alínea a.
(d) Será que se existir um escalar μ nas condições da alínea a. então a característica de T é necessariamente 1? Justifique.

11.11. Seja H uma matriz real simétrica $n \times n$, com valores próprios $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, e, para $x \neq 0$, defina a função

$$q(x) = \frac{x^t H x}{x^t x}.$$

(1.5 valores)

(a) Prove que $\lambda_1 \leq q(x) \leq \lambda_n$ para todo o $x \neq 0$.
(b) Mostre, a partir do resultado da alínea anterior, que

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} q(x).$$

(c) Seja agora G uma matriz real simétrica $n \times n$, e defina $P_\tau = G + \tau H$. Mostre que se λ_1 for positivo, então existe T tal que a função $f_\tau(u, v) = u^t P_\alpha v$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$ para τ maior que T.
(d) Se não for assumido que λ_1 é positivo, poderá existir um valor de T nas condições da alínea anterior?

11.12. Seja $V(\mathbb{C})$ o espaço vectorial das sucessões de números complexos com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar: dados $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, \ldots) \in V(\mathbb{C})$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots) \in V(\mathbb{C})$, define-se

$$\mathbf{z} + \mathbf{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, z_3 + w_3, \ldots),$$
$$\alpha \mathbf{z} = (\alpha z_1, \alpha z_2, \alpha z_3, \ldots), \text{ para } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Considere o subconjunto $\ell^1(\mathbb{C})$ de $V(\mathbb{C})$ definido por $\ell^1(\mathbb{C}) = \{\mathbf{z} \in V(\mathbb{C}) : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty\}$.

a) Mostre que $\ell^1(\mathbb{C})$ é um subespaço de $V(\mathbb{C})$.
b) Considere a transformação linear $T : \ell^1(\mathbb{C}) \to \ell^1(\mathbb{C})$ definida por

$$T((z_1, z_2, z_3, \ldots)) = (z_2, z_3, z_4, \ldots).$$

Mostre que qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$ é valor próprio de T e determine os respectivos vectores próprios.
c) Mostre que não existem valores próprios de T que verifiquem $|\lambda| \geq 1$.
d) Considere agora a transformação linear $S : \ell^1(\mathbb{C}) \to \ell^1(\mathbb{C})$ definida por

$$S((z_1, z_2, z_3, \ldots)) = (0, z_1, z_2, \ldots).$$

Mostre que S não possui valores próprios.

11.13. Seja R uma matriz real $n \times n$ dada, e $M = R^t R$.

(a) Mostre que M é uma matriz real simétrica $n \times n$ e que $x^t M x \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n$.
(b) Prove que os valores próprios de M são números reais não negativos.
(c) Mostre que a matriz M é singular se e só se R o for.
(d) Dê um exemplo que mostre que as multiplicidades algébricas de zero como valor próprio de R e M não são necessariamente iguais. O que pode dizer quanto às multiplicidades geométricas? Justifique.

11.14. Seja $\mathcal{U}$ o espaço vectorial das sucessões reais (munido das operações usuais). Considere o conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ das sucessões (x_n) que satisfazem a relação de recorrência

(1) $$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ é um subespaço de $\mathcal{U}$; indique a sua dimensão e uma base.

(b) Defina o vector $G_n = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$. Mostre que a relação (1) se traduz matricialmente por $G_{n+1} = AG_n$, determinando a matriz A. Conclua que $G_{n+1} = A^n G_1$.
(c) Calcule os valores próprios e os vectores próprios de A.
(d) Aproveite o resultado anterior para calcular A^n.

11.15. Sejam A e B duas matrizes reais $n \times n$, tais que o produto AB é diagonalizável.

(a) Mostre, através de um exemplo, que existem matrizes A e B não diagonalizáveis para as quais o produto AB é diagonalizável.
(b) Mostre que se pelo menos uma das matrizes A ou B é não–singular, então BA também é diagonalizável.
(c) Suponha que A é não–singular e que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base de vectores próprios de AB. Indique uma base de vectores próprios de BA.
(d) Se A e B são ambas singulares, diga se o resultado da alínea (b) continua válido. Justifique.

11.16. Seja $A = uu^t$, onde u é um vector coluna $n \times 1$, $n > 1$.
(a) Mostre que $\mathrm{tr}(A) = \| u \|^2$, onde $\mathrm{tr}(A)$ designa o traço da matriz A.
(b) Mostre que $A^n = (\mathrm{tr}(A))^{n-1} A$ para todo o n natural.
(c) Seja B uma matriz que satisfaz a condição da alínea anterior. Existirá necessáriamente um vector v tal que $B = vv^t$? E se B for simétrica?
(d) Calcule os valores próprios e vectores próprios de A.

11.17. Seja V um espaço linear e $T : V \to V$ uma transformação linear.

(a) Mostre que se λ é um valor próprio de T, então λ^k é um valor próprio de T^k. Qual a relação entre os vectores próprios?
(b) Assuma que existe um número natural n maior que 1 tal que $T^n = T$. Quais os possíveis valores próprios de T?
(c) Para $n = 3$, dê um exemplo de uma transformação satisfazendo a condição da alínea anterior, e que tenha como valores próprios com multiplicidade 1 todos os valores possíveis.
Suponha agora que V está munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$.
(d) Mostre que se além da condição da alínea (b) se tem que T é tal que $< Tv, v > > 0$ para todo o $v \in V$, então o único valor próprio possível para T é 1.

12. Transformações simétricas, hermitianas e unitárias

12.1. Classifique as seguintes matrizes, dizendo se são simétricas, anti–simétricas, hermiteanas, anti–hermiteanas ou unitárias.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3i \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12.2. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ reais e simétricas. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras. No caso de uma afirmação ser falsa, indique um contraexemplo.

(a) $A + B$ é simétrica.
(b) AB é simétrica.
(c) $AB = BA$.
(d) A^k é simétrica para todo o k natural.

12.3. Como se alteram as suas respostas ao problema anterior se se considerar matrizes anti–simétricas em vez de simétricas? E unitárias?

12.4. Mostre que se A e B são simétricas e comutam, então AB é simétrica.

12.5. Como sabe, toda a matriz simétrica é diagonalizável. Será que, em geral, o produto de duas matrizes simétricas é diagonalizável?

12.6. Dê um exemplo de uma matriz real 3×3 que tenha todos os valores próprios sobre o círculo unitário ($|\lambda| = 1$) mas que não seja unitária. Uma matriz nestas condições poderá ser simétrica? E anti–simétrica?

12.7. Dê um exemplo de uma matriz real normal que não seja simétrica, anti–simétrica ou unitária.

13. Formas quadráticas

13.1. Classifique as seguintes matrizes quanto a serem (semi)definidas positivas, negativas, ou indefinidas (a é um parâmetro real).

$$(a)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (c)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} \quad (d)\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

13.2. Considere a seguinte forma quadrática em $\mathbb{R}^2$, representada em termos da base canónica por

$$Q(x) = x^2 + 4xy + ay^2,$$

onde a é um número real. Determine os valores de a para os quais Q é definida positiva. Indique uma forma quadrática diagonal correspondente, e uma matriz diagonalizante.

13.3. Considere no espaço linear $\mathbb{R}^3$ a função

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = x^t A y,$$

onde $\bar{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^t$, $\bar{y} = [y_1\ y_2\ y_3]^t$, e a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que f define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

13.4. Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$. Prove que A^2 é definida positiva se e só se A for não singular.

13.5. Resolva o problema 12.5 assumindo agora que uma das matrizes é definida positiva.

13.6. Sendo A e B matrizes reais simétricas, mostre através de um exemplo que os valores próprios da matriz AB podem não ser reais. E se uma das matrizes consideradas for definida positiva?