Álgebra Linear
Problemas de Avaliação Contínua

Jorge Buescu

Cursos: Matemática, Física, Biomédica

1º semestre de 2002/2003

Observação importante!

Estes problemas destinam-se à avaliação contínua dos estudantes. Note-se que os problemas propostos para cada semana estão programados para um investimento de tempo entre as *quatro* e as *seis horas*, nas quais se incluem as duas horas da aula prática.

Isto significa, em particular, que *é errado pensar que o trabalho desenvolvido nas aulas práticas é suficiente para resolver os problemas propostos*. Este método de funcionamento pressupõe o trabalho, individual ou em grupo, dos estudantes fora das aulas — entre duas e quatro horas semanais.

A experiência mostra que o processo mais eficiente para os próprios estudantes é o de comparecer na aula prática tendo já trabalhado em todos os problemas propostos para essa semana e resolvido parte deles, concluindo a sua resolução depois da aula.

Figura 1: *A curva passa pelos pontos* $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,3)$ *(problema 1.2).*

1 Eliminação de Gauss, Sistemas, Álgebra de matrizes

P 1.1. Resolva, pelo método de Gauss, o sistema de equações $Au = b$, para os seguintes pares (A, b):

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

P 1.2. Determine os coeficientes a, b, c, d por forma a que a curva na figura 1 acima seja o gráfico de uma função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

P 1.3. Discuta a existência de solução dos seguintes sistemas de equações lineares, em termos dos parâmetros reais α e β:

$$(a) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & -2 \\ x - y + z & = & 3 \\ x + z & = & 1/2 \\ 3x - y + 3z & = & \alpha \end{array} \right. \quad (b) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4y + 3z & = & 10 \\ 2x + 7y - 2z & = & 10 \\ x + 5y + \alpha z & = & \beta \end{array} \right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{lcl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 & = & 0 \\ 5x_3+6x_4 & = & 0 \\ \alpha x_3+6x_4 & = & \beta \\ x_2+7x_3+8x_4 & = & 1 \end{array}\right. \quad (d)\left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_2+x_3+3x_4 & = & 1 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 2 \\ x_1+x_2+3x_3+14x_4 & = & 4 \\ 2x_3+\alpha x_4 & = & \beta \end{array}\right.$$

P 1.4. Calcule, sempre que possível, os produtos AB e BA, quando:

$$(a)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (b)\ A=\begin{bmatrix} e^{\pi} & \pi^{e} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \sqrt[3]{5} \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$(c)\ A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & \sqrt[\pi]{7} \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

P 1.5. Seja $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obtenha, por indução, uma fórmula para A^n.

P 1.6. Suponha que A comuta com qualquer matriz 2×2; em particular

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e com } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a=d$ e que $b=c=0$, pelo que A é um múltiplo da matriz identidade. Estas matrizes, conhecidas como *matrizes escalares*, são as únicas que comutam com todas as outras.

P 1.7. Determine os valores de λ para os quais os seguintes sistemas admitem soluções não triviais. Nesses casos, determine essas soluções e diga qual o seu significado geométrico.

$$(a)\left\{\begin{array}{lcl} -x+2y & = & \lambda x \\ x & = & \lambda y \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{lcl} 4x+2y & = & \lambda x \\ -2x+8y & = & \lambda y \end{array}\right.$$

P 1.8. Determine as inversas das seguintes matrizes:

$$(a)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (b)\ B=\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$(c)\ C=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (d)\ D=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

2 Propriedades de matrizes

P 2.1. Em que condições uma matriz diagonal $n \times n$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

é invertível, e qual a sua inversa?

P 2.2. Seja P a matriz $n \times n$ que corresponde à operação de troca da linha i com a linha j. Escreva a matriz P e verifique que $P^2 = I$.

P 2.3. Repita o problema anterior para o caso de troca das colunas i e j.

P 2.4.

a) Mostre que, se A e B são matrizes quadradas invertíveis com inversas resp. A^{-1} e B^{-1}, então a matriz $A\ B$ é invertível e a sua inversa é $B^{-1}\ A^{-1}$.

b) Conclua da alínea anterior que, se A é uma matriz quadrada invertível, então A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

P 2.5. Mostre que se A_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ são matrizes $m \times m$ invertíveis, então a matriz $B = A_1 A_2 \cdots A_n$ também o é, e determine uma expressão para B^{-1}. (Sug.: inspire-se no problema anterior)

P 2.6. Sendo A e B duas matrizes quadradas, será verdade que se o produto AB se anula, então se tem necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$? O que pode concluir no caso em que A é uma matriz invertível?

P 2.7.

a) Sejam A, B matrizes tais que está definido o produto matricial $A.B$. Mostre que $(AB)^T = B^T A^T$. (sug.: deve mostrar que $((AB)^T)_{ij} = (B^T A^T)_{ij}$ para todos os i, j).

b) Se A_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ são matrizes tais que o produto $A_1 A_2 \cdots A_n$ está definido, qual a expressão de $(A_1 A_2 \cdots A_n)^T$ em função de $A_1^T, A_2^T, \cdots, A_n^T$?

3 Característica *(rank)* e núcleo de matrizes

P 3.1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz 2×2. Escreva, em função das entradas de A, uma condição necessária e suficiente para que A seja não singular, e determine a expressão da matriz inversa.

P 3.2. Determine a característica de cada uma das seguintes matrizes:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \qquad (d)\ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ E_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & \alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ em função de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

P 3.3. Nos casos das matrizes B, D e E do problema anterior, o que pode dizer sobre as soluções do sistema linear homogéneo correspondente?

P 3.4. Determine a característica das seguintes matrizes $n \times n$:

a) A matriz cujas entradas são todas iguais a 1;

b) A matriz "tabuleiro de xadrez", em que a entrada a_{ij} é zero se $i + j$ é par e 1 se $i + j$ é ímpar.

P 3.5. Determine o núcleo (espaço nulo) das seguintes matrizes

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad (b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad (d)\ D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

4 Determinantes

P 4.1. Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 100 \\ 3 & 6 & \frac{1000}{\pi} \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, d $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e) $D_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$,

onde no último caso λ é um parâmetro real. Aproveite para deduzir quais os valores de λ para os quais a matriz D_λ é singular.

P 4.2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que a matriz $A - \lambda I$ é singular.

P 4.3. Utilize determinantes para calcular a característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

P 4.4. Diz-se que uma matriz A com coeficientes reais é **ortogonal** se $AA^t = I$.

a) Mostre que se A é uma matriz ortogonal então $\det\big(A\big) = \pm 1$.

b) Mostre que existe uma matriz ortogonal A tal que $\det\big(A\big) = -1$.

P 4.5. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre por indução em n que $\det(A) = \det(A^T)$ (Sug.: Utilize a fórmula de Laplace).

P 4.6. a) Seja $A(x)$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 - x & 3 & 4 \\ 0 & 4 - x & -5 \\ 1 & -1 & 3 - x \end{bmatrix},$$

cujas entradas dependem da variável real x. Calcule $\det(A(x))$, e em seguida $\frac{d}{dx}\det(A(x))$.

b) Defina D_k, $k = 1, 2, 3$, como a matriz obtida de A substituindo as entradas da linha i pelas suas derivadas; isto é,

$$(D_k)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}(x), & j \neq k \\ a'_{ij}(x) & j = k \end{cases}$$

Calcule a soma $\det(D_1(x)) + \det(D_2(x)) + \det(D_3(x))$. O que observa? Consegue conjecturar algum resultado geral?

5 Espaços lineares

P 5.1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são espaços lineares (considere as operações usuais de adição e multiplicação por um número real).

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$. Esboce este conjunto enquanto subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$. Esboce este conjunto enquanto subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Esboce este conjunto enquanto subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$

(e) Conjunto das matrizes $m \times n$.

(f) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores.

(g) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores não singulares.

(h) Conjunto das matrizes singulares $n \times n$.

(i) Conjunto das matrizes $n \times n$ que comutam com uma dada matriz A.

(j) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$ (funções ímpares)

(k) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(x + 2\pi)\}$ (funções periódicas de período 2π)

(l) $\{$ polinómios reais $p(x)$ que se anulam em $x = 0$ $\}$

(m) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ tem segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0\}$, onde a e b são dois números reais dados.

(n) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ tem segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = \cos x\}$, onde a e b são dois números reais dados.

P 5.2. Decida se os seguintes conjuntos, munidos das operações indicadas sobre os corpos indicados, possuem ou não a estrutura de espaço linear.

(a) O quádruplo $(\mathbb{R}^+, \oplus, \otimes, \mathbb{R})$, onde $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos reais positivos, a operação de "soma"$\oplus$ entre dois elementos x e y de $\mathbb{R}^+$ é definida por $x \oplus y = x\,y$ e a operação de "multiplicação escalar"entre um elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ e um elemento x de $\mathbb{R}^+$ é definida por $\alpha \otimes x = x^\alpha$.

(b) O quádruplo $(\mathbb{R}, +, \otimes, \mathbb{R})$, onde $+$ é a adição usual de números reais e $\otimes$ é a multiplicação escalar definida por $\alpha \otimes x = \alpha^2 \,.\, x$.

(c) O quádruplo $(\mathbb{Q}, +, \times, \mathbb{R})$, onde $+$ e $\times$ são as operações usuais da aritmética dos reais.

(d) O quádruplo $(\mathbb{R}, +, \times, \mathbb{Q})$, onde $+$ e $\times$ são as operações usuais da aritmética dos reais.

(e)[1] O quádruplo $(\mathbb{Z}, \oplus_7, \otimes_7, \mathbb{Z}_7)$, onde $\oplus_7$ e $\otimes_7$ são as operações da aritmética modular módulo 7.

---

[1] $\mathbb{Z}_7$, ou seja, o conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ munido das operações de aritmética modular módulo 7, é um corpo. Os alunos mais interessados são convidados a mostrar este facto. Os alunos *ainda* mais interessados são convidados a mostrar que $\mathbb{Z}_n$ é corpo se e só se n é primo.

P 5.3. Seja P o plano no espaço tridimensional que tem por equação $3x+2y+z=6$. Qual a equação do plano P_0 paralelo a P que passa pela origem? P e P_0 são subespaços de $\mathbb{R}^3$?

P 5.4. Determine se os seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes ou não. Caso não o sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

(a) Em $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,2,2)$, $u_3 = (1,2,3,3)$ e $u_4 = (1,2,3,4)$.

(b) No espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais 2×2,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) Em $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (1,0,2)$, $u_3 = (1,2,0)$ e $u_4 = (1,2,2)$.

(d) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1+t+t^2$ e $p_4(t) = 1+t+t^2+t^3$.

(e) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1+t^2+t^3$ e $p_4(t) = 1+t+t^2+t^3$.

P 5.5. Descreva, com um esboço no plano xy, o espaço das colunas e o núcleo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Forneça uma base para o espaço das colunas.

6 Bases e dimensão

P 6.1. Indique, justificando, qual a dimensão dos seguintes espaços lineares, e, no caso de dimensão finita, indique uma base.

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$. Esboce este espaço enquanto subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \wedge x - y = 0\}$. Esboce este espaço enquanto subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \wedge x - y = 0 \wedge y - z = 0\}$. Esboce este espaço enquanto subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(d) Matrizes reais $m \times n$, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

(e) $L(S)$, onde S é o subconjunto do espaço das funções

reais de variável real, com as operações usuais, definido por $S = \{\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t), \cos(2t) + \operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t)\}$.

(f) Espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

(g) Espaço das colunas da matriz A da alínea (f).

(h) Espaço das linhas da matriz A da alínea (f).

(i) Espaço das sucessões de variável real que verificam a relação $\alpha_k = \alpha_{k-1} + 2\alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$.

(h) Espaço das funções reais da variável real que se anulam em $x = \sqrt{3}$.

P 6.2. Seja V o espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

(a) Diga qual a dimensão de V e indique uma base ordenada. Justifique. Indique as coordenadas do polinómio $(1-t^2)(1+t)$ nessa base.

(b) Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S = \{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se S é linearmente independente.

(c) Diga qual a dimensão do espaço linear $L(S)$, e determine uma base desse espaço. Justifique.

(d) Seja T o subconjunto de todos os polinómios de V que se anulam em 0. Diga se T é um subespaço linear. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base. Justifique.

P 6.3. Para cada um dos seguintes conjuntos F de funções reais, seja G o conjunto formado pelas derivadas de todas as ordens dessas funções (incluindo ordem 0, ou seja as próprias funções de F). Diga qual a dimensão de $L(G)$ e, no caso de essa dimensão ser finita, indique, justificando, uma base do espaço.

(a) $F = \{ e^{-t}, (t \in \mathbb{R}) \}$ (b) $F = \{ e^{-t}, e^{t}, (t \in \mathbb{R}) \}$
(c) $F = \{ \cos(t), (t \in \mathbb{R}) \}$ (d) $F = \{ t^2, (t \in \mathbb{R}) \}$
(e) $F = \{ e^{t}, \cos(t), (t \in \mathbb{R}) \}$ (f) $F = \{ \frac{1}{t}, (t \neq 0) \}$

P 6.4. Considere, no espaço linear real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2, o conjunto $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, onde

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \; M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Construa uma base de $L(S)$, espaço gerado por S, e indique a respectiva dimensão.

b) Mostre que o conjunto $W = \{M \in L(S) : m_{12} = 0\}$ forma um subespaço de $L(S)$ e determine uma base para W. Determine as coordenadas do vector $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ nessa base.

P 6.5. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço linear real dos polinómios de grau ≤ 2, e $\mathcal{B}_c = \{1, t, t^2\}$ a sua base canónica.

a) Mostre que $\mathcal{B}_1 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ é uma nova base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Determine a matriz de mudança de base S da base ordenada $\mathcal{B}_c$ para a base ordenada $\mathcal{B}_1$.

P 6.6. Seja $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathbb{R}^2$.

a) Determine a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}_c$ para

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Seja

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}_c$ para $\mathcal{B}_2$ e de $\mathcal{B}_2$ para $\mathcal{B}_c$. Calcule as componentes dos vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ na base $\mathcal{B}_2$.

c) Determine as matrizes de mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ e de $\mathcal{B}_2$ para $\mathcal{B}_1$. **Forte sugestão:** utilize as alíneas anteriores!)

P 6.7. Determine a matriz de mudança de base S da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base ordenada

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \mathrm{sen}\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \right\}.$$

Mostre que S é uma matriz **ortogonal** (recorde o problema 4.4) e que $S^t = S^{-1}$. Qual o significado geométrico desta igualdade?

P 6.8. Existe um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ linearmente independente sobre o corpo $\mathbb{Q}$ mas linearmente dependente sobre o corpo $\mathbb{R}$?

P 6.9. O conjunto dos números reais forma um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{R}$ de dimensão 1. Mostre que, enquanto espaço linear sobre o corpo $\mathbb{Q}$, ele possui dimensão infinita.

7 O corpo dos complexos

P 7.1. Escreva os seguintes números complexos sob a forma $a + bi$:

$$(a)\ \ (2-i)^3;\quad (b)\ \ \frac{2}{4-3i};\quad (c)\ \ \frac{1-i}{1+i};\quad (d)\ \ (-i)^n,\quad n \in \mathbb{N}.$$

P 7.2. Sejam $z_1 = a_1 + i\,b_1$ e $z_1 = a_2 + i\,b_2$ dois complexos. Mostre que:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

b) $\overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$;

c) $|z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

P 7.3. Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar:

$$(a)\ \ 2;\quad (b)\ \ 3i;\quad (c)\ \ 1-i;\quad (d)\ \ (1-i)^n,\quad n \in \mathbb{N};\quad (e)\ \ \sqrt{1-i};\quad (f)\ \ \sqrt[3]{i}.$$

P 7.4. Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + \sqrt{3}i| = 2\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} : z - \overline{z} = i\}$.

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$.

e) $\{z \in \mathbb{C} : z = 1 - i + (1 + i)t,\ t \in \mathbb{R}\}$.

P 7.5. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ um polinómio de coeficientes reais — isto é, todos os coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

b) Conclua que se $\lambda = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz de $p(z)$ (isto é, verifica $p(\lambda) = 0$), então $\overline{\lambda} = a - ib$ também o é.

c) Mostre que um polinómio de $3.^0$ grau a coeficientes reais que possua uma raiz complexa com parte imaginária não–nula possui três raízes distintas.

d) Calcule todas as raízes complexas de $z^3 - z^2 + z - 1$.

P 7.6. Demonstre, utilizando as fórmulas de Euler, que

a) $\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$;

b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$.

P 7.7. Seja $\mathbb{C}^2$ o espaço linear sobre o corpo dos complexos definido por $\{(z,w) : z,\, w \in \mathbb{C}\}$ através das operações usuais entre complexos.

a) Determine a dimensão e construa uma base deste espaço.

b) Existe um conjunto de três vectores linearmente independentes em $\mathbb{C}^2$? Em caso afirmativo forneça um exemplo.

c) Quais as condições sobre os escalares α e β para que os vectores $(1,\alpha)$ e $(1,\beta)$ sejam linearmente independentes em $\mathbb{C}^2$?

P 7.8. Repita o problema anterior para o espaço linear *sobre o corpo dos reais* $\tilde{\mathbb{C}}^2$, definido por $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{(z,w) : z,\, w \in \mathbb{C}\}$ através das operações usuais entre complexos.

P 7.9. Sejam I, J, K, respectivamente, as matrizes de entradas complexas

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Mostre que estas matrizes verificam as relações de comutação $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$, onde $\mathbf{1}$ é a identidade 2×2.

Observação. As quatro matrizes $\{I, J, K, \mathbf{1}\}$ formam a base de uma *álgebra de divisão* de dimensão 4 sobre o corpo dos reais. Isto significa que, se sobre o espaço linear por elas gerado se definir a multiplicação de vectores pelas regras acima, se obtém um conjunto fechado para as várias operações. Note-se, no entanto, que ele tem propriedades especiais: por exemplo, a multiplicação *não é comutativa.*

Esta álgebra, descoberta pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton em 1843, dá pelo nome de Álgebra dos Quaterniões e tem importantes aplicações em Física e Matemática. Por exemplo, Frobenius mostrou em 1877 que as únicas álgebras de divisão (i.e. sem divisores de zero) reais são $\mathbb{R}$ (de dimensão 1), $\mathbb{C}$ (de dimensão 2) e a Álgebra dos Quaterniões (de dimensão 4). Neste sentido preciso, não é possível construir uma álgebra real maior do que a dos Quaterniões sem perder estrutura matemática.

Em Física, é possível deduzir de forma concisa e muito mais elegante do que com Análise vectorial clássica as equações de Maxwell, de Dirac e as transformações de Lorenz. O estudante interessado pode consultar o artigo de J. Lambek "If Hamilton had prevailed: quaternions in physics", Mathematical Intelligencer **4** (1995), 7 - 15 e referências aí citadas.

8 Transformações lineares

P 8.1. Determine se a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada é ou não linear. Em caso afirmativo, calcule a matriz que a representa em relação à base dos vectores coordenados unitários.

(a) $T(x, y, z) = (y, z, x)$

(b) $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$

(c) $T(x, y, z) = (x - z, y - z, 0)$

(d) $T(x, y, z) = (0, y, z)$

(e) $T(x, y, z) = (2x - y + 3z, y + 2z, -2z)$

P 8.2. Considere a transformação $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que roda cada ponto do plano por um ângulo fixo θ em torno da origem no sentido directo.

a) Verifique que T_θ é uma transformação linear.

b) Calcule a matriz que representa T_θ em relação à base dos vectores coordenados unitários.

c) *Sem realizar cálculos,* indique a matriz que representa $(T_\theta)^{-1}$.

d) Usando a alínea b) e a correspondência entre composição de transformações lineares e produto de matrizes, represente matricialmente a relação $T_\phi \circ T_\theta = T_{\theta+\phi}$. Que fórmulas suas conhecidas ficam assim demonstradas ?

P 8.3. Construa geometricamente a imagem do rectângulo $ABCDE$ da fig. 1 por efeito da transformação linear representada, na base canónica, por cada uma das seguintes matrizes:

a) A rotação $R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) A rotação $R_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) A "distorção" $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

d) A transformação de Lorentz $L_2 = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$.

e) A transformação de corte $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

f) A transformação de corte $S_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$.

g) A reflexão $E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

h) A reflexão $E_{\pi/4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i) A projecção $P_{\pi/4} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

j) A transformação nilpotente $N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

k) A transformação nilpotente $N_{\pi/4} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

P 8.4. Considere, no plano $\mathbb{R}^2$, as transformações lineares R, rotação em torno da origem no sentido inverso por um ângulo de $\pi/2$, e E, reflexão no eixo dos yy.

a) Calcule, em relação a bases à sua escolha, as matrizes A_R e A_E que representam respectivamente R e E.

b) Mostre, a partir de a), que $R \circ E \neq E \circ R$.

c) Represente geometricamente os vectores da base canónica e os seus transformados através de $R \circ E$ e de $E \circ R$.

P 8.5. Construa, para cada uma das seguintes transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, a matriz que a representa na base canónica:

a) Reflexão do vector $[x, y, z]^t$ no plano yz.

b) Rotação do vector $[x, y, z]^t$ por um ângulo θ em torno do eixo yy', no sentido directo quando observado dos yy positivos.

c) Projecção do vector $[x, y, z]^t$ no plano yz.

P 8.6. Considere, no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, base canónica, e $\mathcal{B}_2 = \{[-1\ 1\ 1]^t, [-1\ \ -1\ 1]^t, [0\ 0\ 1]^t\}$.

a) Determine a matriz S que realiza a mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$.

b) Dado um vector $u = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, isto é, de coordenadas $[x_1\ x_2\ x_3]^t$ na base $\mathcal{B}_1$, determine as suas coordenadas $[y_1\ y_2\ y_3]^t$ na base $\mathcal{B}_2$ **(Sugestão:** Inverta S).

c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial na base canónica é

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Usando os resultados de a) e b), determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_2$.

P 8.7. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço linear real dos polinómios de grau ≤ 2, e $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(1+t^2) = 2t,\ \ T(t^2) = 2t,\ \ T(1+t) = 1$.

a) Determine a matriz A que representa T na base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Determine a matriz B que representa T na base ordenada $\{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$. Indique a matriz de mudança de base S tal que $B = S^{-1}AS$. **Obs.: recorde o problema 6.5!**

P 8.8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(z_1, z_2) = (z_1 + z_2,\ i\, z_2)$. Determine as representações matriciais de T:

a) na base canónica de $\mathbb{C}^2$ $\mathcal{B} = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$;

b) na base $\mathcal{B}' = \{(-1-i,\ 2),\ (1, 0)\}$.

Qual das representações lhe parece mais agradável? Porquê?

P 8.9. Como sabe, uma transformação linear $T : V \to W$ entre espaços de dimensão finita, fixas bases em V e W, é univocamente determinada por uma matriz A_T.

Construa bases para os espaços imagem e núcleo, indicando as respectivas dimensões, quando A_T é dada por cada uma das matrizes abaixo. Em cada caso, verifique o teorema da dimensão.

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \\ 6 & 11 & -7 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

P 8.10. Seja P_n o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a n.

(a) Mostre que a transformação $T : P_3 \to P_3$ definida por

$$T(p) = p'' + ap' + bp,$$

onde a e b são números reais, é uma transformação linear.

(b) Determine a representação matricial para T em relação à base ordenada $\{1, t, t^2, t^3\}$.

(c) Discuta a dimensão do núcleo de T em termos de a e b. Em cada caso, indique uma base para o núcleo.

(d) Utilize os resultados da alínea anterior para determinar as soluções em P_3 da equação diferencial

$$p'' + ap' + bp = 0.$$

(e) Utilize os resultados da alínea (c) para determinar todas as soluções em P_3 da equação diferencial

$$p'' + ap' + bp = 1 - t^2.$$

P 8.11. Seja V o espaço linear real das matrizes reais de 2×2 de entradas a_{ij} satisfazendo $a_{11} + a_{22} = 0, a_{12} + a_{21} = 0$, e considere as seguintes matrizes de V:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V.

(b) Dada a transformação linear $T : V \to V$ definida através das seguintes relações:

$$T(H) = J \ , \ T(J) = -H$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base contendo H e J.

(c) Determine a característica e a dimensão do núcleo de T, e indique justificadamente se é invertível.

(d) Calcule todas as soluções U da equação linear $T(U) = B$ onde $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$.

P 8.12. Seja V um espaço linear de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear de V em V. Pode T ser injectiva mas não sobrejectiva? Pode T ser sobrejectiva mas não injectiva?

P 8.13. A Teoria da Relatividade Restrita afirma que a relação entre as coordenadas espácio-temporais (x, y, z, t) e $(x', y'z', t')$ de dois referenciais de inércia que se deslocam um em relação ao outro com velocidade v é dada por

$$\begin{cases} x' &= \beta(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \beta(t - \frac{v}{c^2}x), \end{cases}$$

onde c é a velocidade da luz, $|v| < c$ e $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. A transformação linear que passa dos sistemas de coordenadas (x, t) para (x', t') chama-se *transformação de Lorentz.*

a) Determine a matriz L_v que representa a transformação de Lorentz na base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Mostre que $L_0 = I$ e que L_v é não-singular.

c) Demonstre a *lei relativística de adição das velocidades:* $L_v\, L_u = L_w$, onde $w = \dfrac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$. Compare com o resultado clássico e comente.

9 Valores próprios e vectores próprios

P 9.1. Determine os valores próprios e vectores próprios (complexos) de cada uma das seguintes matrizes, identificando em cada caso as multiplicidades algébrica e geométrica:

$$\text{a)}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \text{b)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix},\quad \text{c)}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \text{d)}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

P 9.2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que possui uma representação matricial

$$\begin{bmatrix}-9 & 4 & 4\\ -8 & 3 & 4\\ -16 & 8 & 7\end{bmatrix}$$

em relação à base canónica. Mostre que T possui uma representação matricial diagonal.

P 9.3. Sejam A e B matrizes $n \times n$ com coeficientes num corpo. Mostre que se $I - AB$ é não-singular, então $I - BA$ é não-singular e

$$\big(I - BA\big)^{-1} = I + B\big(I - AB\big)^{-1}A.$$

P 9.4. Seja A a matriz $\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{smallmatrix}\right]$.

a) Determine os valores próprios e os vectores próprios da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é representada por A em relação à base canónica.

b) Determine os valores próprios e os vectores próprios da transformação linear $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que é representada por A em relação à base canónica.

P 9.5. Uma matriz R diz-se *matriz de rotação* se é ortogonal e $\det R = 1$. Mostre que uma rotação num espaço de dimensão *ímpar* deixa fixos os vectores de pelo menos um subespaço de dimensão 1 (eixo de rotação) — isto é, $+1$ é valor próprio de R. (Sug.: considere $\det(R - I)$.)

P 9.6. Seja $A = \left[\begin{smallmatrix}-25 & -36\\ 18 & 26\end{smallmatrix}\right]$.

a) Mostre que existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

b) Determine os valores próprios e vectores próprios de A^{10}.

P 9.7. a) Forneça um exemplo de uma matriz de inteiros 2×2 cujos valores próprios sejam irracionais.

b) Podem a soma e/ou o produto dos valores próprios de uma matriz $n \times n$ de entradas racionais ser irracionais?

P 9.8. Um senhor comprou, no princípio de um mês, um par de coelhos para a sua filha Inês. No fim do segundo mês havia três coelhos; no fim do terceiro mês havia cinco; e, em geral, no final do mês n o número de coelhos é a soma dos coelhos dos dois meses anteriores.

a) Designando número de coelhos da Inês no fim do n-ésimo mês por C_n, tem-se pois que $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$. Mostre que

$$\begin{bmatrix} C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Calcule $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]^n \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e n é um inteiro positivo.

P 9.9. Seja $C^1[(0,1)]$ o espaço das funções reais continuamente diferenciáveis no intervalo $(0,1)$ e $T : C^1[(0,1)] \to C^1[(0,1)]$ o operador linear definido por $T(f)\,(x) = x\, f'(x)$. Determine os valores próprios e vectores próprios de T.

Observação: pode ser-lhe útil verificar que

$$\frac{d}{dx}\left[\,\log|f(x)|\,\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

P 9.10. Seja A uma matriz $n \times n$ com polinómio característico $f(x) = (c_1 - x)^{d_1} \ldots (c_k - x)^{d_k} = \det\big(A - xI\big)$. Mostre que $\operatorname{tr}\big(A\big) = c_1 d_1 + \cdots + c_k d_k$.

P 9.11. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear que possui uma representação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica. Quais são as condições sobre $a, b,$ e c para que $\mathbb{R}^4$ possua uma base de vectores próprios da transformação T?

10 Forma Canónica de Jordan

P 10.1. Determine a Forma Canónica de Jordan J, a base de vectores próprios generalizados e a matriz S tal que $J = S^{-1}AS$ para as matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

P 10.2. Determine "por inspecção "a Forma Canónica de Jordan de cada uma das seguintes matrizes, indicando as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos valores próprios:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

P 10.3. O *traço* de uma matriz $A_{n\times n}$ é a soma dos elementos da diagonal principal: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Mostre que o traço de uma matriz é invariante por transformações de semelhança, isto é, se $B = S^{-1}AS$, então $tr(A) = tr(B)$.

b) Tomando acima $J = S^{-1}AS$, conclua que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, onde $\lambda_i,\ i = 1, \cdots, n$ são os valores próprios de A *incluindo multiplicidades*.

P 10.4. Como já foi demonstrado na devida altura, o determinante de uma matriz $A_{n\times n}$ é invariante por transformações de semelhança, isto é, se $B = S^{-1}AS$, então $\det(A) = \det(B)$. Deduza, de forma análoga ao problema anterior, que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, onde $\lambda_i,\ i = 1, \cdots, n$ são os valores próprios de A *incluindo multiplicidades*.

P 10.5. Dada uma matriz $A_{n\times n}$, defina formalmente para $t \in \mathbb{R}$

$$e^{At} = I + A\,t + \frac{A^2\,t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n\,t^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n\,t^n}{n!},$$

ignorando de momento questões de convergência.

a) Sendo J a Forma Canónica de Jordan de A(isto é, tal que $J = S^{-1}AS$), mostre que
$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}.$$

b) Para as matrizes A_1 e A_2 do problema 10.1, calcule desta forma $e^{A_1 t}$ e $e^{A_2 t}$ (Nota: observe que em ambos os casos já calculou S, e que e^{Jt} é (quase) trivial de calcular!)

Observação . A determinação da *exponencial de uma matriz*, que acabou de fazer, é um problema crucial para sistemas dinâmicos. A matriz e^{At} fornece a solução geral da equação diferencial linear a coeficientes constantes $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$. (Se esta observação hoje não lhe diz nada, não se preocupe).

11 Produtos internos

P 11.1. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha = (1,2)$ e $\beta = (-1,1)$. Mostre que existe um vector γ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle\alpha,\gamma\rangle = -1$ e $\langle\beta,\gamma\rangle = 3$.

P 11.2. Seja V um espaço linear sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$ com um produto interno, que se designa por $\langle\ ,\ \rangle$.

a) Mostre que $\langle 0,\beta\rangle = 0$ qualquer seja $\beta \in V$.

b) Mostre que se $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$ qualquer seja $\beta \in V$, então $\alpha = 0$.

c) Se $\alpha,\beta \in V$ mostre que $\alpha = \beta$ se e só se $\langle\alpha,\gamma\rangle = \langle\beta,\gamma\rangle$ qualquer seja $\gamma \in V$.

P 11.3. Seja V um espaço linear real ou complexo. Mostre que se $\langle\ ,\ \rangle_1$ e $\langle\ ,\ \rangle_2$ são produtos internos em V, então $\langle\ ,\ \rangle_1 + \langle\ ,\ \rangle_2$ é um produto interno em V. O conjunto dos produtos internos em V é um espaço linear?

P 11.4. Determine todos os produtos internos do espaço linear real $\mathbb{R}$ e do espaço linear complexo $\mathbb{C}$.

P 11.5. Seja $\mathcal{P}_1$ o espaço linear real de polinómios com coeficientes reais de grau menor ou igual um.

a) Mostre que a função

$$\left\langle a_0 + a_1x, b_0 + b_1x\right\rangle = a_0b_0 + \frac{a_0b_1}{2} + \frac{a_1b_0}{2} + \frac{a_1b_1}{3}$$

define um produto interno em $\mathcal{P}_1$.

b) Determine uma matriz A tal que

$$\left\langle a_0 + a_1x, b_0 + b_1x\right\rangle = \begin{bmatrix} a_0\, a_1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

P 11.6. Determine um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle(1,0),(0,1)\rangle = 2$.

P 11.7. Seja V o espaço linear complexo das matrizes $n \times n$ com coeficientes complexos.

a) Mostre que $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$ é um produto interno em V, onde tr é o traço e $B^* = \bar{B}^t$.

b) Determine o subespaço ortogonal ao subespaço das matrizes diagonais.

P 11.8. Considere o espaço euclidiano real V das sucessões $\{u_n\}$ de números reais tais que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ é convergente, com o produto interno definido por

$$\langle \{u_n\}, \{v_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, v_n.$$

Esta série é absolutamente convergente para todas as sucessões $\{u_n\}$, $\{v_n\} \in V$. Considere também o conjunto $S \subset V$ das sucessões com um número finito de termos não-nulos.

a) Mostre que S é um subespaço de V.

b) Determine os subespaços $S^{\perp}$, $(S^{\perp})^{\perp}$ e $S + S^{\perp}$.

c) Prove que S tem dimensão infinita.

d) Mostre que $V \setminus S$ possui um número infinito de
vectores linearmente independentes. $V \setminus S$ é subespaço de V?

P 11.9. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores

$$\beta_1 = (1, 0, 1), \beta_2 = (1, 0, -1), \beta_3 = (0, 3, 4)$$

obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual.

P 11.10. a) Escreva uma equação cartesiana do plano perpendicular à recta

$$x - 5 = 2y - 4 = z$$

e que contém o ponto $(5, 4, 0)$.

b) Escreva equações cartesianas que definem a recta que é perpendicular ao subconjunto afim definido por $Ax+By+Cz = \sqrt{2}$, com $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, e que contém a origem.

P 11.11. Seja V o espaço linear real de dimensão 2, e considere a função $F : V \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $F(x, y) = \sqrt{(x - y)^2 + 3y^2}$.

a) Mostre que F é uma norma, ou seja, que para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ se tem

   i) $F(\alpha) \geq 0$ e $F(\alpha) > 0$ se $\alpha \neq 0$;

   ii) $F(c\alpha) = |c|F(\alpha)$ para todo o $c \in \mathbb{R}$;

   iii) $F(\alpha + \beta) \leq F(\alpha) + F(\beta)$.

b) Mostre que $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{2}[F^2(\alpha + \beta) - F^2(\alpha) - F^2(\beta)]$ é um produto interno.

c) Designa-se por E a projecção ortogonal, relativamente ao produto interno definido em b), de V sobre o subespaço gerado pelo vector $(3, 4) \in V$. Determine uma fórmula para $E(x, y)$.

P 11.12. Seja V um espaço euclideano de dimensão n com uma base ortonormal

$$\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}.$$

Dada uma transformação linear $T : V \to V$, mostre que a matriz que representa T em relação à base $\mathcal{B}$ é

$$\left[a_{ij}\right] = \langle T(\beta_j), \beta_i \rangle.$$

P 11.13. Seja V um espaço linear. Diz-se que uma transformação linear $P : V \to V$ é uma **projecção** se $P^2 = P \circ P = P$.

a) Seja $P : V \to V$ uma projecção. Mostre que a transformação linear $\tilde{P} = I - P$ definida por $\tilde{P}(v) = v - P(v)$ é uma projecção.

b) Seja $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$, e seja $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ o produto interno usual. Mostre que existe uma projecção $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que a imagem de P é W mas P não é a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre W.

12 Matrizes simétricas, hermitianas, unitárias

P 12.1. Classifique as seguintes matrizes, dizendo se são simétricas, anti–simétricas, hermiteanas, anti–hermiteanas ou unitárias.

$$(a)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b)\begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3i \end{bmatrix} \quad (c)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad (d)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P 12.2. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ reais e simétricas. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras. No caso de uma afirmação ser falsa, indique um contraexemplo.

(a) $A + B$ é simétrica.

(b) AB é simétrica.

(c) $AB = BA$.

(d) A^k é simétrica para todo o k natural.

P 12.3. Como se alteram as suas respostas ao problema anterior se se considerar matrizes anti–simétricas em vez de simétricas? E unitárias?

P 12.4. Mostre que se A e B são simétricas e comutam, então AB é simétrica.

P 12.5. Como sabe, toda a matriz simétrica é diagonalizável. Será que, em geral, o produto de duas matrizes simétricas é diagonalizável?

P 12.6. Dê um exemplo de uma matriz real 3×3 que tenha todos os valores próprios sobre o círculo unitário ($|\lambda| = 1$) mas que não seja unitária. Uma matriz nestas condições poderá ser simétrica? E anti–simétrica?

P 12.7. Dê um exemplo de uma matriz real normal que não seja simétrica, anti–simétrica ou unitária.

13 Formas quadráticas

P 13.1. Classifique as seguintes matrizes quanto a serem (semi)definidas positivas, negativas, ou indefinidas (a é um parâmetro real).

$$(a)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (c)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} \quad (d)\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

P 13.2. Considere a seguinte forma quadrática em $\mathbb{R}^2$, representada em termos da base canónica por

$$Q(x) = x^2 + 4xy + ay^2,$$

onde a é um número real. Determine os valores de a para os quais Q é definida positiva. Indique uma forma quadrática diagonal correspondente, e uma matriz diagonalizante.

P 13.3. Considere no espaço linear $\mathbb{R}^3$ a função

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = x^t A y,$$

onde $\bar{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^t$, $\bar{y} = [y_1\ y_2\ y_3]^t$, e a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que f define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

P 13.4. Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$. Prove que A^2 é definida positiva se e só se A for não singular.

P 13.5. Resolva o problema 12.5 supondo agora que uma das matrizes é definida positiva.

P 13.6. Sendo A e B matrizes reais simétricas, mostre através de um exemplo que os valores próprios da matriz AB podem não ser reais. E se uma das matrizes consideradas for definida positiva?