2

Espaços Vetoriais

Conteúdo

2.1 Espaço Vetorial. Propriedades

Em vários ramos da matemática, defrontamo-nos com um conjunto, no qual é, ao mesmo tempo significativo e interessante trabalhar com *combinações lineares* dos objetos dele. Por exemplo, no estudo de equações lineares, é bastante natural considerar combinações lineares das linhas de uma matriz. Em cálculo diferencial trabalhamos com combinações lineares de funções, por exemplo, no estudo de equações diferenciais. Em geral, a primeira experiência com vetores é apresentada com o estudo do espaço euclidiano tridimensional.

Em geral, a Álgebra Linear é o ramo da matemática que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto mais uma noção de combinação linear de elementos desse conjunto. Nesta seção vamos definir o objeto matemático que, como a experiência mostrou, é a abstração mais útil e interessante deste tipo de sistema algébrico.

Definição 2.1.1 *Um **Espaço Vetorial** consiste do seguinte:*

(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.

(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.

*(3) uma **operação de adição de vetores**, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto é, V é **fechado** com relação à operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:*

(A_1) Comutatividade. $u + v = v + u$; $\forall\ u, v \in V$.

(A_2) Associatividade. $u + (v + w) = (u + v) + w$; $\forall\ u, v, w \in V$.

(A_3) Elemento Neutro. Existe um elemento $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u$; $\forall\, u \in V$.

(A_4) Elemento Simétrico. Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0_V$; $\forall\ u \in V$.

*(4) uma **operação de multiplicação por escalar**, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é **fechado** com relação à operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:*

(M_1) Associatividade. $(\alpha \beta) u = \alpha (\beta u)$; $\forall\ u \in V$ e $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M_2) Distributividade para a Adição de Elementos.
$\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$; $\forall\ u, v \in V$ e $\forall\ \alpha \in \mathbb{F}$.

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar.
$(\alpha + \beta)\,u = \alpha\,u + \beta\,u$; $\forall\ u \in V$ *e* $\forall\ \alpha, \beta \in I\!\!F$.

(M_4) Elemento Identidade. $1_{I\!\!F}\,u = u$; $\forall\ u \in V$.

Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $I\!\!F = I\!\!R$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $I\!\!F = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo. Por simplicidade, em todo texto podemos pensar $I\!\!F = I\!\!R$ ou $I\!\!F = \mathbb{C}$, a menos nos casos em que o corpo é explicitado. De uma maneira mais geral, podemos considerar que $I\!\!F$ é um corpo de característica zero, veja Definição 1.8.1.

Exemplo 2.1.1 *O conjunto do números reais, $I\!\!R$, com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais, é um espaço vetorial real.*

Exemplo 2.1.2 *O conjunto do números complexos, $\mathbb{C}$, com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos, é um espaço vetorial complexo, considerando o corpo dos escalares como sendo $I\!\!F = \mathbb{C}$. Entretanto, podemos considerar o corpo de escalares como sendo $I\!\!F = I\!\!R$. Desse modo, temos que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial real.*

Exemplo 2.1.3 *O conjunto $I\!\!R^n = \{\ u = (x_1, \cdots, x_n)\ /\ x_i \in I\!\!R\ \}$, conjunto de todas as n–uplas reais, com a operação de adição de elementos definida por:*

$$u + v = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

e a operação de multiplicação por escalar definida por:

$$\lambda u = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

é um espaço vetorial real.

Para mostrar que a operação de adição de elementos e a operação de multiplicação por escalar definidas em $I\!\!R^n$ verificam os axiomas da definição de espaço vetorial, basta utilizar as propriedades da operação de adição e da operação de multiplicação de elementos do corpo $I\!\!R$.

Exemplo 2.1.4 *O conjunto* $\mathbb{C}^n = \{ (z_1, \cdots, z_n) \ / \ z_i \in \mathbb{C} \}$, *conjunto de todas as* n*–uplas complexas, com as operações usuais, é um espaço vetorial complexo, considerando o corpo dos escalares como sendo* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Para mostrar que a operação de adição de elementos e a operação de multiplicação por escalar definidas em $\mathbb{C}^n$ verificam os axiomas da definição de espaço vetorial, basta utilizar as propriedades da operação de adição e da operação de multiplicação de elementos do corpo $\mathbb{C}$. Entretanto, podemos considerar o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. desse modo, temos que $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial real.

Exemplo 2.1.5 *O conjunto* $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ *é uma função* $\}$, *com a operação de adição de elementos definida como:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad \forall\, f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

e a operação de multiplicação por escalar definida como:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad ; \quad \forall\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ \text{e} \ \lambda \in \mathbb{R}$$

é um espaço vetorial real.

Exemplo 2.1.6 *O conjunto* $\mathcal{C}([a,b]) = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ *é uma função contínua* $\}$, *com a operação de adição de elementos e como a operação de multiplicação por escalar definidas em* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, *é um espaço vetorial real.*

Exemplo 2.1.7 *Seja* $n \geq 0$ *um número natural. O conjunto dos polinômios reais de grau* $\leq n$, *que denotamos por* $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, *com a operação de adição de elementos e a operação de multiplicação por escalar definidas como no Exemplo 2.1.5, é um espaço vetorial real.*

Exemplo 2.1.8 *O conjunto da matrizes reais de ordem* $m \times n$, *que vamos denotar por* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *é um espaço vetorial real, com as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar.*

Teorema 2.1.1 (Unicidade do Elemento Neutro)
Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Então, existe um único elemento neutro da operação de adição $0_V \in V$.

Demonstração – O axioma (A_3) afirma que existe pelo menos um elemento neutro 0_V em V. Vamos supor que existem dois elementos neutros 0_V e 0_1, isto é,

$$0_V = 0_V + 0_1 = 0_1 + 0_V = 0_1$$

o que prova a unicidade do elemento neutro da operação de adição. ■

Exemplo 2.1.9 *Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Assim, o elemento neutro da operação de adição é o polinômio $p_0(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido por:*

$$p_0(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$$

para todo x. Assim, temos que $a = b = c = d = 0$.

Teorema 2.1.2 (Unicidade do Elemento Simétrico)
Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Então, todo elemento $u \in V$ possui um único elemento simétrico.

Demonstração – O axioma (A_4) afirma que todo elemento $u \in V$ possui pelo menos um elemento simétrico $-u \in V$. Vamos supor que o elemento $u \in V$ possui dois elementos simétricos $-u$ e u_1, isto é,

$$u + (-u) = 0_V \qquad \text{e} \qquad u + u_1 = 0_V$$

Desse modo, temos que

$$(-u) = 0_V + (-u) = (u + u_1) + (-u) = 0_V + u_1 = u_1$$

o que prova a unicidade do elemento simétrico. ■

Exemplo 2.1.10 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}([a,b])$. Assim, o elemento neutro da operação de adição é a função $f_0 \in \mathcal{C}([a,b])$ dada por:*

$$f_0(x) = 0 \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [a,b]\,.$$

Além disso, dada uma função $f \in \mathcal{C}([a,b])$, o seu elemento simétrico é a função $(-f)$ definida por:

$$(-f)(x) = -f(x) \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [a,b]\,.$$

Teorema 2.1.3 (Lei do Cancelamento) *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*. Se* $u, v, w \in V$ *e* $u + v = u + w$*, então* $v = w$*.*

Demonstração – Somando $(-u)$ em ambos os lados na igualdade temos

$$v = u + (-u) + v = u + (-u) + w = w$$

o que completa a prova. ■

Teorema 2.1.4 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*. Sejam* $u, w \in V$*. Então, existe um único elemento* $v \in V$ *tal que* $u + v = w$*.*

Demonstração – Somando $(-u)$ em ambos os lados da equação tem–se que

$$v = u + (-u) + v = (-u) + w$$

o que completa a prova. ■

Teorema 2.1.5 *Considere* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*. Sejam* $u, v \in V$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*. Então, temos as seguintes propriedades:*

(a) $0_{\mathbb{F}}\, u = 0_V$;

(b) $\alpha\, 0_V = 0_V$;

(c) $(-\alpha)\, u = -(\alpha\, u) = \alpha\,(-u)$;

(d) se $\alpha\, u = 0_V$, *então* $\alpha = 0_{\mathbb{F}}$ *ou* $u = 0_V$;

(e) se $\alpha\, u = \alpha\, v$ *e* $\alpha \neq 0_{\mathbb{F}}$, *então* $u = v$;

(f) se $\alpha\, u = \beta\, u$ *e* $u \neq 0_V$, *então* $\alpha = \beta$;

(g) $-(u + v) = (-u) + (-v) = -u - v$;

(h) $u + u = 2\,u$, $u + u + u = 3\,u$, *de um modo geral*, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u = n\,u$.

Demonstração

(a) Seja $v = 0_{\mathbb{F}}\, u$. Queremos mostrar que $v = 0_V$. Fazendo

$$v + v = 0_{\mathbb{F}}\,(u + u) = v$$

e somando $(-v)$ em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$v = v + 0_V = v + (\, v + (-v)\,) = v + (-v) = 0_V$$

Logo, $v = 0_V$. ■

(b) A prova é feita de modo análogo ao item *(a)*, e pode ficar a cargo do leitor. □

(c) Seja $v = (-\alpha)\, u$. Temos que

$$v + \alpha\, u = (-\alpha)\, u + \alpha\, u = (-\alpha + \alpha)\, u = 0_V$$

Assim, obtemos que $v = -(\alpha\, u)$. Vamos provar agora que $v = \alpha\,(-u)$. Fazendo

$$\alpha\,(-u) + \alpha\, u = \alpha(\,(-u) + u\,) = \alpha\, 0_V = 0_V$$

provamos que $-(\alpha\, u) = \alpha\,(-u)$. ■

(d) Tomamos $\alpha\, u = 0_V$ com $\alpha \neq 0_{\mathbb{F}}$. Sabemos que existe um único $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha\,\alpha^{-1} = 1_{\mathbb{F}}$. Desse modo, tem–se que

$$u = 1_{\mathbb{F}}\, u = (\alpha^{-1}\,\alpha)\, u = \alpha^{-1}\,(\alpha\, u) = \alpha^{-1}\, 0_V = 0_V$$

Logo, $u = 0_V$. ■

(e) Como $\alpha \neq 0_{\mathbb{F}}$, sabemos que existe um único $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha\,\alpha^{-1} = 1_{\mathbb{F}}$. Desse modo, temos que

$$u = (\alpha^{-1}\,\alpha)\, u = \alpha^{-1}\,(\alpha\, u) = \alpha^{-1}\,(\alpha\, v) = (\alpha^{-1}\,\alpha)\, v = v$$

Logo, $u = v$. ■

(f) Somando $-(\beta\, u)$ em ambos os lados da igualdade $\alpha\, u = \beta\, u$, obtemos

$$\alpha\, u + (-(\beta\, u)) = \alpha\, u + (-\beta)\, u = = (\alpha + (-\beta))\, u = (\alpha - \beta)\, u = 0_V$$

como $u \neq 0_V$, temos que $(\alpha - \beta) = 0_{\mathbb{F}}$. Logo, $\alpha = \beta$. ■

(g) A prova é feita de modo análogo ao item *(f)*, e pode ficar a cargo do leitor. □

(h) A prova é feita por indução a partir dos axiomas (A_2) e (M_3) da definição de espaço vetorial. □

Exercícios

Exercício 2.1 *Mostre que o conjunto* $\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \;/\; x, y \in \mathbb{R} \}$ *é um espaço vetorial real, com as operações usuais de adição de elementos e multiplicação por escalar.*

Exercício 2.2 *Mostre que o conjunto de todas as matrizes reais de ordem* n*, que denotamos por* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*, com a operação de adição de elementos,* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$*, definida por:* $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ *e a operação de multiplicação por escalar definida por:* $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$*, é um espaço vetorial real.*

Exercício 2.3 *Considere o espaço vetorial real* $V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x > 0 \}$ *com as operações:*

- ***adição de elementos:*** $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$.
- ***multiplicação por escalar:*** $\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, \alpha y) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

(a) *Exiba o elemento neutro da operação adição.*

(b) *Exiba o elemento simétrico aditivo do elemento* $(x, y) \in V$.

(c) *Mostre que* $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v \quad , \quad u, v \in V \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.4 *Considere o conjunto* $V = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x > 0 \}$*. Definimos as seguintes operações em* V*:*

1. $x \oplus y = xy\,, \ \forall\, x, y \in V$;
2. $\alpha \odot x = x^\alpha\,, \ \forall\, x \in V, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Verifique se $(V, \oplus, \odot)$ *é um espaço vetorial real.*

Exercício 2.5 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$*. Mostre que*

$$Z = V \times W = \{ (v,u) \;/\; v \in V \quad e \quad w \in W \}$$

munido das seguintes operações:

$$(v_1 , w_1) + (v_2 , w_2) = (v_1 + v_2 , w_1 + w_2)$$

$$\lambda(v , w) = (\lambda v , \lambda w) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$.

2.2 Subespaço Vetorial

Definição 2.2.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um* ***subespaço vetorial*** *de V é um subconjunto U de V que é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.*

Exemplo 2.2.1 *O subconjunto $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - ax = 0 \ ; \ a \in \mathbb{R} \}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Dê uma interpretação geométrica para S.*

Exemplo 2.2.2 *o conjunto $\mathcal{C}_0([a,b]) = \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) \ / \ f(a) = f(b) = 0 \}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}([a,b])$.*

Exemplo 2.2.3 *O subconjunto S do $\mathbb{R}^3$ definido da forma:*

$$S = \{ w \in \mathbb{R}^3 \ / \ w = a(1,-1,1) + b(2,1,-1) \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Dê uma interpretação geométrica para S.

Teorema 2.2.1 (Subespaço Vetorial) *Um subconjunto* ***não vazio*** *U de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, para quaisquer elementos $u, v \in U$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, tem–se que $u + v \in U$ e $\alpha u \in U$.*

Demonstração – ($\Longrightarrow$) Se U é um subespaço vetorial de V, então satisfaz todos os axiomas de espaço vetorial, em particular satisfaz os axiomas de fechamento.

($\Longleftarrow$) Agora, vamos mostrar que se U satisfaz os axiomas de fechamento, então satisfaz os axiomas da adição de elementos e os axiomas da multiplicação por escalar. Como $U \subset V$, os axiomas (A_1) e (A_2) são automaticamente satisfeitos, pois são válidos para todos os elementos de V. De modo análogo, os axiomas (M_1), (M_2), (M_3) e (M_4) são satisfeitos automaticamente. Finalmente, devemos provar somente os axiomas:

(A_3) Elemento Neutro. Para quaisquer $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que $\lambda u \in U$. Fazendo $\lambda = 0_{\mathbb{F}}$, obtemos $0_{\mathbb{F}} u = 0_V \in U$. Logo, U possui elemento neutro.

(A_4) Elemento Simétrico. Para quaisquer $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que $\lambda u \in U$. Fazendo $\lambda = -1_{\mathbb{F}}$, obtemos $-1_{\mathbb{F}} u = 1_{\mathbb{F}} (-u) \in U$. Logo, todo elemento de U possui o elemento simétrico. O que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.2.4 *O subconjunto* $S = \{ (x,y) \in I\!R^2 \;/\; y - 2x = 1 \}$ *não é um subespaço vetorial de* $I\!R^2$.

De fato, o elemento neutro da operação de adição, $0_{I\!R^2} = (0,0)$, não pertence a U. Além disso, o subconjunto U não é fechado com relação às operações de adição de elementos e de multiplicação por escalar.

Exemplo 2.2.5 *o subconjunto* $U = \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) \;/\; f(a) = 1 \}$ *não é um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}([a,b])$.

De fato, o elemento neutro da operação de adição, $f \equiv 0$, não pertence a U. Além disso, o subconjunto U não é fechado com relação às operações de adição de elementos e de multiplicação por escalar.

Exemplo 2.2.6 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!R)$. *O subconjunto*

$$S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(I\!R) \;/\; p(-1) = 0 \quad e \quad p'(1) = 0 \}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(I\!R)$.

Para mostrar que S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(I\!R)$, vamos verificar se o elemento neutro da adição pertence a S e se os axiomas de fechamento são satisfeitos. É fácil ver que o polinômio identicamente nulo satisfaz as condições $p(-1) = 0$ e $p'(1) = 0$.

Inicialmente, vamos verificar se o subconjunto S é fechado com relação à operação de adição de elementos, isto é, dados os elementos $p(x)$, $q(x) \in S$ temos que

$$(p + q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad (p + q)'(1) = p'(1) + q'(-1) = 0$$

Logo, $(\, p(x) + q(x)\,) \in S$.

Finalmente, vamos verificar se o subconjunto S é fechado com relação à operação de multiplicação por escalar, isto é, dados os elementos $p \in S$ e $\lambda \in I\!R$ temos que

$$(\lambda\, p)(-1) = \lambda\, p(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad (\lambda\, p)'(1) = \lambda\, p'(1) = 0$$

Logo, $\lambda\, p(x) \in S$. Portanto, o subconjunto S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(I\!R)$.

Exemplo 2.2.7 *Considere o sistema linear homogêneo*

$$\begin{cases} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{cases} .$$

Mostre que o conjunto solução é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Vamos obter a solução do sistema linear utilizando o escalonamento

$$\begin{cases} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 3z & = & 0 \end{cases}$$

Portanto, temos que $x = -z$ e $y = -z$ com $z \in \mathbb{R}$.

Assim, o conjunto solução do sistema linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y, z) = \alpha(-1, -1, 1) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \}$$

onde $v = (-1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ é denominada solução básica. Agora podemos verificar facilmente que S é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Por simplicidade, representamos o sistema linear homogêneo na sua forma matricial

$$AX = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Assim, podemos definir o conjunto solução da seguinte forma:

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ AX = 0 \} \qquad \text{onde} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

Temos uma representação mais interessante com a qual podemos obter vários resultados sobre o conjunto solução. Apresentamos o mesmo problema de uma maneira mais geral no Exemplo 2.2.9.

Exemplo 2.2.8 *O subconjunto*

$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \ / \ \int_0^1 f(x)dx \geq 0 \right\}$$

não é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{C}([0, 1])$.

De fato, o conjunto S não é fechado em relação à operação de multiplicação por escalar. Tomando um elemento $f \in S$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ negativo, temos que o elemento $(\lambda f) \notin S$. Note que, o elemento neutro da operação de adição, $f \equiv 0$, pertence ao conjunto S e o conjunto S é fechado com relação à operação de adição de elementos.

Exemplo 2.2.9 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*. O subconjunto* S *do* $\mathbb{R}^n$ *definido da forma:*

$$S = \{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ AX = 0 \} \qquad onde \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

conjunto solução do sistema linear homogêneo, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$*.*

É fácil ver que o elemento neutro da adição $0_{\mathbb{R}^n} \in S$, isto é, o elemento neutro $0_{\mathbb{R}^n}$ é a solução trivial do sistema linear homogêneo.

Considerando $x, y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$A(X + Y) = AX + AY = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x + y) \in S$$

e que

$$A(\lambda X) = \lambda AX = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\lambda x) \in S\,.$$

Portanto, o subconjunto S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.

Note que estamos utilizando a seguinte notação

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad e \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$.

Exemplo 2.2.10 *O conjunto* S *de todas as funções representadas da forma*

$$f(x) = ae^x + be^{-x} \qquad ; \qquad a, b \in \mathbb{R}\,,$$

para $x \in \mathbb{R}$*, é um subespaço vetorial de* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$*.*

De fato, o elemento neutro da operação de adição, $f \equiv 0$, pertence a S, bastando tomar $a = b = 0$. Além disso, o conjunto S é fechado com relação às operações de adição de elementos e de multiplicação por escalar.

Exercícios

Exercício 2.6 *Verifique se o subconjunto* S *de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *definido por:*

$$S = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^2 = A \} ,$$

o conjunto das matrizes idempotentes, é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercício 2.7 *Mostre que o subconjunto de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \ / \ x - y - z = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 2.8 *Considere o espaço vetorial real* $V = \{ (x,y) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \}$, *com as operações:*

- ***adição de elementos:*** $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 5, \, y_1 + y_2)$
- ***multiplicação por escalar:*** $\alpha \odot (x,y) = (\alpha\, x + 5(\alpha - 1), \, \alpha\, y) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

(a) Exiba o elemento neutro da operação adição.

(b) Exiba o elemento simétrico aditivo do elemento $(x,y) \in V$.

(c) Verifique se $W = \{ (x,y) \in V \ / \ x = -5 \}$ *é um subespaço vetorial de* V.

Definição 2.2.2 *Dado um elemento* $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ *fixo, porém arbitrário, e um escalar* $d \in \mathbb{R}$. *O subconjunto* $H \subset \mathbb{R}^n$ *definido por:*

$$H = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = d \}$$

é denominado **hiperplano**.

Exercício 2.9 *Considere um hiperplano* H *contido em* $\mathbb{R}^n$. *Mostre que* H *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$, *no caso em que* $d = 0$.

Exercício 2.10 *Considere o seguinte subconjunto* S *de* $\mathcal{C}([a,b])$ *definido por:*

$$S = \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) \ / \ f \text{ é uma função crescente} \} .$$

Verifique se S *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}([a,b])$.

Exercício 2.11 *Mostre que o seguinte subconjunto*

$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \ / \ \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}$$

é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercício 2.12 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *Mostre que o subconjunto*

$$U = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(-1) = p(1) = 0 \}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Exercício 2.13 *Definimos o* ***traço*** *da matriz* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *que denotamos por* $tr(A)$, *da seguinte forma:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, .$$

Mostre que o subconjunto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$S = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ tr(A) = 0 \}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercício 2.14 *Mostre que os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *definidos por:*

$$U = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = A \}$$

$$W = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = -A \}$$

são subespaços vetoriais de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercício 2.15 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([-a,a])$ *com* $a \in \mathbb{R}_+$. *Mostre que os seguintes subconjuntos*

$$U = \{ f \in \mathcal{C}([-a,a]) \ / \ f(-x) = f(x) \ ; \ x \in [-a,a] \}$$

$$W = \{ f \in \mathcal{C}([-a,a]) \ / \ f(-x) = -f(x) \ ; \ x \in [-a,a] \}$$

são subespaços vetoriais de $\mathcal{C}([-a,a])$.

Exercício 2.16 *Considere o subconjunto* S *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *definido por:*

$$S = \{ v \in \mathbb{R}^2 \ / \ v = \alpha(1,\ 2) + (3,\ 2) \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \} \, .$$

Verifique se S *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$.

2.3 Combinação Linear. Subespaço Gerado

Definição 2.3.1 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $I\!F$. *O elemento* $u \in V$ *é uma* ***combinação linear*** *dos elementos* $v_1, \cdots, v_n \in V$ *se existem escalares* $c_1, \cdots, c_n \in I\!F$ *tais que*

$$u = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n .$$

Definição 2.3.2 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $I\!F$ *e* S *um conjunto finito de elementos de* V*, isto é,* $S = \{ v_1, \cdots, v_n \}$. *O subconjunto* U *construído a partir dos elementos de* S *da seguinte forma:*

$$U = \left\{ u \in V \ / \ u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_i \in I\!F \right\}$$

é um subespaço vetorial de V*, que vamos denotar por*

$$U = [v_1, \cdots, v_n] \qquad \text{ou por} \qquad U = [S] ,$$

denominado ***subespaço gerado*** *pelos elementos de* S. *Dizemos que o conjunto* S *é um* ***sistema de geradores*** *para o subespaço* U.

Exemplo 2.3.1 *Considere o seguinte espaço vetorial real*

$$\mathcal{C}_0([-\pi, \pi]) = \{ f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \ / \ f(-\pi) = f(\pi) = 0 \}$$

Note que, $\mathcal{C}_0([-\pi, \pi])$ *é também um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$. *Considere o subconjunto* S *de elementos de* $\mathcal{C}_0([-\pi, \pi])$ *dado por:*

$$S = \{ \sin(x), \ \sin(2x), \ \cdots, \ \sin(nx) \}$$

O subconjunto W *definido como:*

$$W = \left\{ f \in \mathcal{C}_0([-\pi, \pi]) \ / \ f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin(kx) \quad ; \quad c_k \in I\!R \right\}$$

é o subespaço gerado pelos elementos de S. *Logo,* W *é um subespaço de* $\mathcal{C}_0([-\pi, \pi])$.

Exemplo 2.3.2 *Considere uma matriz* $A \in I\!M_{m \times n}(I\!R)$ *com* $m > n$. *Vamos denotar por* $v_1, \cdots, v_n \in I\!R^m$ *as colunas da matriz* A. *O subconjunto* $\mathcal{R}(A) \subset I\!R^m$ *definido por:*

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ y \in I\!R^m \ / \ y = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \quad ; \quad c_k \in I\!R \right\}$$

é o subespaço gerado pelas colunas da matriz A*, denominado* ***espaço coluna de*** A.

Exemplo 2.3.3 *Dada a matriz* $A \in \mathbb{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

mostre que o elemento $v = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ *pertence ao* ***espaço coluna de*** A.

Basta mostrar que o elemento v pode ser representado pela combinação linear

$$(-1, 0, 1) = a(1, 2, 3) + b(1, 1, 1) \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R},$$

isto é, devemos encontrar a solução do sistema linear

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -1 \\ 2a & + & b & = & 0 \\ 3a & + & b & = & 1 \end{array}$$

Logo, $a = 1$ e $b = -2$ é a única solução do sistema linear acima. Assim, mostramos que o elemento $v \in \mathcal{R}(A)$.

Exemplo 2.3.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *Dados os elementos*

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 - 1 \\ p_2(x) &= x^2 + x - 1 \\ p_3(x) &= x + 2 \end{aligned}$$

existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $p_1(x) = \alpha\, p_2(x) + \beta\, p_3(x)$ *?*

Exemplo 2.3.5 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$. *Dados os elementos*

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1) \\ v_2 &= (3, -2) \\ v_3 &= (1, -1) \end{aligned}$$

determine o elemento $u \in \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\frac{u + v_1}{2} + \frac{v_2 + u}{3} = v_3 .$$

Definição 2.3.3 *Dizemos que um espaço vetorial* V *é* ***finitamente gerado*** *se existe um subconjunto finito* $S \subset V$ *de maneira que* $V = [S]$.

Exemplo 2.3.6 *Considere o subespaço* $W = \{ A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ A = A^t \}$ *de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. *Mostre que* W *é gerado pelas matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basta observar que qualquer elemento $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é representado de modo único pela combinação linear

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.3.7 *Mostre que o espaço vetorial* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *é gerado pelas matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Basta mostrar que qualquer elemento $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é representado pela combinação linear

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

para $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4 \in \mathbb{R}$. Assim, devemos mostrar que o sistema linear

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & & & = & a \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & & & \alpha_4 & = & b \\ \alpha_1 & + & & & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & c \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & d \end{array}$$

possui solução. Escalonando a matriz do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

obtemos que $posto(A) = 4$. Assim, concluímos que o sistema linear possui uma única solução. Desse modo, mostramos que o conjunto $\{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$ gera de modo único os elementos do espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Note que, para obter a solução do sistema linear, devemos realizar as mesmas operações elementares no lado direito do sistema.

Exercícios

Exercício 2.17 *Considere o subespaço vetorial de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \ / \ x - y - z = 0 \right\}.$$

Determine um sistema de geradores para U.

Exercício 2.18 *Considere o subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$ *dado por:*

$$U = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + z + t = 0 \quad e \quad -x + 2y + z - t = 0 \}.$$

Determine um sistema de geradores para U.

Exercício 2.19 *Seja* W *o subespaço de* $\mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ *gerado pelas matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique se a matriz A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

pertence ao subespaço W.

Exercício 2.20 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$. *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

verifique se os elementos $u, v \in \mathbb{R}^3$, *dados abaixo, pertencem ao subespaço gerado pelas colunas da matriz* A.

(i) $u = (1, 2, -8)$ *(ii)* $v = (6, -3, -2)$.

Exercício 2.21 *Mostre que as matrizes*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam um sistema de geradores para o subespaço $W = \{ A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ A = A^t \}$.

2.4 Soma e Intersecção. Soma Direta

Teorema 2.4.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Sejam U e W subespaços vetoriais de V. Então, o subconjunto de V definido por:*

$$U \cap W = \{ v \in V \ / \ v \in U \quad e \quad v \in W \}$$

é um subespaço vetorial de V.

Demonstração – Temos que $U \cap W \neq \emptyset$, pois $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Logo, $0_V \in U \cap W$. Agora, basta mostrar que $U \cap W$ satisfaz as condições do Teorema 2.2.1, isto é, que satisfaz os axiomas de fechamento.

Sejam $u, v \in U \cap W$. Logo, $u, v \in U$ e $u, v \in W$. Como U e W são subespaços vetoriais de V temos que $u + v \in U$ e $u + v \in W$. Portanto, mostramos que $U \cap W$ é fechado com relação à operação de adição de elementos.

De modo análogo, seja $u \in U \cap W$. Logo, $u \in U$ e $u \in W$. Como U e W são subespaços vetoriais de V temos que $\lambda u \in U$ e $\lambda u \in W$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$. Portanto, mostramos que $U \cap W$ é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Desse modo, provamos que $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V. ■

Corolário 2.4.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Então, a intersecção de uma coleção arbitrária de subespaços de V é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração – Aprova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 2.4.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Sejam U e W subespaços vetoriais de V. Então, o subconjunto de V definido por:*

$$U + W = \{ v \in V \ / \ v = u + w \quad com \quad u \in U \quad e \quad w \in W \}$$

é um subespaço vetorial de V.

Demonstração – Temos que $U + W \neq \emptyset$, pois $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Logo, $0_V \in U + W$. Agora, basta mostrar que $U + W$ satisfaz as condições do Teorema 2.2.1, isto é, que satisfaz os axiomas de fechamento. □

Definição 2.4.1 (soma direta) *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Sejam U e W subespaços vetoriais de V tais que $U \cap W = \{ 0_V \}$. Neste caso o subespaço $U + W$ é denominado soma direta dos subespaços U e W, e denotamos por $U \oplus W$.*

Exemplo 2.4.1 *Considere os seguintes subespaços de* $I\!R^3$

$$U = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ z = 0 \} \quad e \quad W = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ y = 0 \} .$$

Temos que $I\!R^3 = U + W$, *entretanto, não como soma direta dos subespaços* U *e* W.

Podemos verificar facilmente que

$$U = [(1,0,0), (0,1,0)] \quad \text{e} \quad W = [(1,0,0), (0,0,1)] .$$

Assim, temos que

$$U + W = [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)] \quad \text{e} \quad U \cap W = [(1,0,0)] .$$

Portanto, temos que $I\!R^3 = U + W$, mas não como soma direta.

Exemplo 2.4.2 *Considere os seguintes subespaços de* $I\!R^2$

$$U = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ y = 0 \} \quad e \quad W = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ x = 0 \} .$$

Temos que $I\!R^2 = U + W$ *é uma soma direta dos subespaços* U *e* W.

Podemos verificar facilmente que

$$U = [(1,0)] \quad \text{e} \quad W = [(0,1)] .$$

Assim, temos que

$$U + W = [(1,0), (0,1)] \quad \text{e} \quad U \cap W = \{ 0_{I\!R^2} \} .$$

Portanto, temos que $I\!R^2 = U \oplus W$.

Exemplo 2.4.3 *Considere os seguintes subespaços de* $I\!R^2$

$$U = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ y = x \} \quad e \quad W = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ y = -2x \} .$$

Temos que $I\!R^2 = U + W$ *é uma soma direta dos subespaços* U *e* W.

Podemos verificar facilmente que

$$U = [(1,1)] \quad \text{e} \quad W = [(1,-2)] .$$

Assim, temos que

$$U + W = [(1,1), (1,-2)] \quad \text{e} \quad U \cap W = \{ 0_{I\!R^2} \} .$$

Portanto, temos que $I\!R^2 = U \oplus W$.

Definição 2.4.2 *Considere* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*. Sejam* U *e* W *dois subespaços vetoriais de* V*. Dizemos que o espaço vetorial* V *é a soma direta dos subespaços* U *e* W*, e denotamos* $V = U \oplus W$*, se*

1. $U \cap W = \{ 0_V \}$
2. $V = U + W$

Proposição 2.4.1 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de um espaço vetorial* V*. Então,* $V = U \oplus W$ *se, e somente se, cada elemento* $v \in V$ *possui uma única decomposição* $v = u + w$*, com* $u \in U$ *e* $w \in W$*.*

Demonstração – ($\Longrightarrow$) Considerando por hipótese $V = U \oplus W$, temos a existência da decomposição, então basta mostrar a unicidade. Para isso, supomos que

$$v = u + w = u_1 + w_1 \quad ; \quad u, u_1 \in U \quad \text{e} \quad w, w_1 \in W$$

Assim, obtemos $u - u_1 = w - w_1$. Como $u - u_1 \in U$, então,

$$w - w_1 \in W \cap U = \{ 0_V \}$$

Logo, $w - w_1 = 0_V$ o que implica em $w = w_1$. De mesmo modo, temos que $u - u_1 = 0_V$ implicando em $u = u_1$, mostrando a unicidade da decomposição.

($\Longleftarrow$) Tomando por hipótese a unidade da decomposição $v = (u + w) \in V$, com $u \in U$ e $w \in W$, vamos mostrar que $V = U \oplus W$. Para isso, supomos que $v \in U \cap W$. Desse modo, temos que

$$u + w = (u + v) + (w - v)$$

Pela unicidade da decomposição, podemos afirmar que

$$u = u + v \qquad \text{e} \qquad w = w - v$$

Logo, $v = 0_V$. Assim, provamos que $U \cap W = \{ 0_V \}$. Portanto, mostramos que $V = U \oplus W$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.4.4 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^2$

$$U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x \} \qquad e \qquad W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = -x \}.$$

Temos que todo elemento $v \in \mathbb{R}^2$ *é escrito de modo único como* $v = u + w$ *onde* $u \in U$ *e* $w \in W$*, isto é,* $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$*.*

Podemos verificar facilmente que $U + W = [(1,1), (1,-1)]$. Consideramos um elemento genérico $v = (x,y) \in I\!R^2$. Escrevendo

$$(x,y) \;=\; a(1,1) \;+\; b(1,-1)$$

obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \end{cases}$$

que tem por única solução

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{x-y}{2}\,.$$

Desse modo, mostramos que os coeficientes da combinação linear, a e b, são obtidos de modo único em função das componentes do elemento genérico $v = (x,y) \in I\!R$. Portanto, obtemos o resultado desejado.

Do Corolário 2.4.1 decorre que se S é uma coleção arbitrária de elementos de V, então existe um menor subespaço de V que contém S, isto é, um subespaço de V que contém S e que está contido em todos os outros subespaços que contém S. Desse modo, podemos apresentar o conceito de subespaço gerado da forma a seguir.

Definição 2.4.3 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!F$ e S um conjunto de elementos de V. O* ***subespaço gerado*** *por S, que vamos denotar por $U = [S]$, é definido como sendo a intersecção de todos os subespaços de V que contém o conjunto S. Quando S é um conjunto finito de elementos de V, isto é, $S = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$, dizemos que U é o* ***subespaço gerado*** *pelos elementos de S.*

Exemplo 2.4.5 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z \}$$

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Inicialmente, vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço U. Para os elementos $u \in U$ temos que

$$u = a(1,0,1) + b(0,1,0) \qquad \text{para} \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, $\{ (1,0,1), (0,1,0) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço U.

Agora vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço W. Para os elementos $w \in W$ temos que

$$w = c(-1,1,0) + d(-1,0,1) \qquad \text{para} \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

Logo, $\{ (-1,1,0), (-1,0,1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço W.

Vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$. Sabemos que, se $v \in U \cap W$, então $v \in U$ e $v \in W$. Assim, temos que

$$a(1,0,1) + b(0,1,0) = c(-1,1,0) + d(-1,0,1) \qquad \text{para} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a = -c - d \\ b = c \\ a = d \end{cases}$$

cuja solução é dada por $a = d$, $b = -2d$ e $c = -2d$ para $d \in \mathbb{R}$.

Portanto, os elementos $v \in U \cap W$ são escritos como $v = d(1,-2,1)$ para $d \in \mathbb{R}$. Logo, $\{ (1,-2,1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Exemplo 2.4.6 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + 3z = 0 \}$$

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Os elementos $v = (x,y,z) \in U \cap W$ satisfazem as equações

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Escolhendo x e y como variáveis básicas e z como variável livre, temos que

$$y = \frac{2}{3}z \quad \text{e} \quad x = -\frac{5}{3}z \quad , \quad z \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, o conjunto solução do sistema linear homogêneo é escrito da seguinte forma:

$$(x,y,z) = \alpha(-5,2,3) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Portanto, temos que $U \cap W = [(-5,2,3)]$.

Exemplo 2.4.7 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do* $\mathbb{R}^3$ *dados por:*

$$U = \{ u \in \mathbb{R}^3 \ / \ u = \lambda\bar{u} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$W = \{ w \in \mathbb{R}^3 \ / \ w = \alpha\bar{w} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \}$$

com $\bar{u}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ *não-nulos. Temos que o subespaço* $U + W = [\bar{u}, \bar{w}]$.

Exemplo 2.4.8 *Considere os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0 \} \quad e \quad W = [(1,2,1)]$$

Temos que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Podemos verificar facilmente que $U = [(1,1,0), (1,0,1)]$. Vamos mostra que qualquer elemento $u = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ é escrito de modo único pela combinação linear

$$u = a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(1,2,1) \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Portanto, basta mostrar que a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

é não singular. Assim, podemos obter de modo único os coeficientes da combinação linear, a, b e c, em função das componentes do elemento $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.4.9 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + 3z = 0 \}$$

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.

Inicialmente, vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço U. Para os elementos $u \in U$ temos que

$$u = a(2,1,0) + b(-3,0,1) \qquad \text{para} \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

Logo, $\{ (2,1,0), (-3,0,1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço U.

Agora vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço W. Para os elementos $w \in W$ temos que

$$w = c(-1,1,0) + d(-1,0,1) \qquad \text{para} \qquad c,\, d \in \mathbb{R}$$

Logo, $\{ (-1,1,0), (-1,0,1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço W.

Portanto, o subespaço $U + W$ tem como um sistema de geradores os seguintes elementos

$$v_1 = (2,1,0) \quad , \quad v_2 = (-3,0,1) \quad , \quad v_3 = (-1,1,0) \quad \text{e} \quad v_4 = (-1,0,1)\,,$$

isto é, $U + W = [v_1, v_2, v_3, v_4]$.

Exemplo 2.4.10 *Considere os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^3$

$$U = [(1,2,1), (-1,1,-1)] \qquad e \qquad W = [(2,2,1), (1,1,-1)]\,.$$

Encontre um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Temos que se $v \in U \cap W$, então $v \in U$ e $v \in W$. Assim, temos que

$$a(1,2,1) + b(-1,1,-1) = c(2,2,1) + d(1,1,-1) \qquad \text{para} \qquad a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}\,.$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} a & - & b & = & 2c & + & d \\ 2a & + & b & = & 2c & + & d \\ a & - & b & = & c & - & d \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} a & - & b & - & 2c & - & d & = & 0 \\ 2a & + & b & - & 2c & - & d & = & 0 \\ a & - & b & - & c & + & d & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução é dada por $a = -2d$, $b = d$ e $c = -2d$ para $d \in \mathbb{R}$. Portanto, temos que os elementos $v \in U \cap W$ são escritos como $v = d(1,1,1)$ para $d \in \mathbb{R}$. Logo, $\{ (1,1,1) \}$ é um sistemas de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Exercícios

Exercício 2.22 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *e os subespaços gerados*

$$U = [(1,0,0),(1,1,1)] \quad e \quad W = [(0,1,0),(0,0,1)]\,.$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $V = U \cap W$.

Exercício 2.23 *Considere os seguintes subespaços*

$$U = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x + y = 0 \ e \ z - t = 0 \}$$

$$W = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x - y - z + t = 0 \}$$

Pede–se:

(a) *Determine um sistema de geradores para o subespaço* $U \cap W$.

(b) *Determine um sistema de geradores para o subespaço* $U + W$.

(c) *O subespaço* $U + W$ *é uma soma direta ? Justifique sua resposta.*

Exercício 2.24 *Sejam* U *o subespaço do* $I\!R^3$ *gerado pelo elemento* $u_1 = (1, 0, 0)$ *e* W *o subespaço do* $I\!R^3$ *gerado pelos elementos* $w_1 = (1, 1, 0)$ *e* $w_2 = (0, 1, 1)$. *Mostre que o espaço vetorial* $I\!R^3 = U \oplus W$.

Exercício 2.25 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $I\!M_n(I\!R)$

$$U = \{ A \in I\!M_n(I\!R) \ / \ A^t = A \} \quad e \quad W = \{ A \in I\!M_n(I\!R) \ / \ A^t = -A \}\,.$$

Mostre que $I\!M_n(I\!R) = U \oplus W$.

Exercício 2.26 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathcal{C}([-a,a])$

$$U = \{ f \in \mathcal{C}([-a,a]) \ / \ f(-x) = f(x) \ ; \ x \in [-a,a] \}$$

$$W = \{ f \in \mathcal{C}([-a,a]) \ / \ f(-x) = -f(x) \ ; \ x \in [-a,a] \}$$

Mostre que $\mathcal{C}([-a,a]) = U \oplus W$.

Exercício 2.27 *Considere o subespaço* V *do espaço vetorial* $I\!R^3$ *dado por:*

$$V = \{ (x,\, y,\, z) \in I\!R^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \quad e \quad -x + 3y + 2z = 0 \}\,,$$

Determine um subespaço W *do* $I\!R^3$ *tal que* $I\!R^3 = V \oplus W$.

Exercício 2.28 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$ *e os seguinte subespaços*

$$U = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ y = \ 3x \} \quad e \quad W = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ y = -2x \} .$$

Verifique se o seguinte subconjunto

$$U \cup W = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ (x,y) \in U \quad ou \quad (x,y) \in W \}$$

é um subespaço vetorial de $I\!R^2$*.*

Exercício 2.29 *Encontre o conjunto solução* $S \subset I\!R^3$ *do sistema linear homogêneo*

$$\begin{cases} 2x + 4y + \ z = 0 \\ \ x + \ y + 2z = 0 \\ \ x + 3y - \ z = 0 \end{cases}$$

Mostre que S *é um subespaço do* $I\!R^3$*. Dado o subespaço*

$$U = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ x - y + z = 0 \} ,$$

determine um sistema de geradores para o subespaço $S \cap U$*.*

Exercício 2.30 *Considere o subespaço* S *do* $I\!R^3$ *definido por:*

$$S = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \} .$$

Determine um subespaço W *do* $I\!R^3$ *tal que* $R^3 = S \oplus W$*.*

Exercício 2.31 *Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $I\!M_2(I\!R)$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \quad ; \quad a \, , \, b \, , \, c \in I\!R \right\}$$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \quad ; \quad a \, , \, b \in I\!R \right\}$$

Determine um sistema de geradores para os subespaços

$$W \quad , \quad U \quad , \quad W \cap U \qquad e \qquad W + U \, .$$

Exercício 2.32 *Sejam* W *o subespaço de* $I\!R^3$ *gerado pelo vetor* $w = (1,0,0)$ *e* U *o subespaço do* $I\!R^3$ *gerado pelos vetores* $u_1 = (1,1,0)$ *e* $u_2 = (0,1,1)$ *. Mostre que* $I\!R^3 = U \oplus W$ *.*

2.5 Dependência e Independência Linear

Definição 2.5.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{ v_1, \cdots, v_n \} \subset V$ é **Linearmente Independente**(LI) se, e somente se, toda combinação linear nula*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \qquad ; \qquad \alpha_i \in \mathbb{F}$$

implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definição 2.5.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{ v_1, \cdots, v_n \} \subset V$ é **Linearmente Dependente**(LD) se, e somente se, é possível uma combinação linear nula*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \qquad ; \qquad \alpha_i \in \mathbb{F}$$

sem que os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sejam todos nulos.

De maneira equivalente, encontramos o conceito de dependência e independência linear apresentado da forma a seguir.

Definição 2.5.3 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Um subconjunto S de V é dito **Linearmente Dependente** (LD), se existirem elementos distintos $v_1, \cdots, v_n$ em S e escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ em $\mathbb{F}$, não todos nulos, tais que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V .$$

*Um conjunto que não é linearmente dependente é **Linearmente Independente**(LI). Decorrem facilmente da definição as seguintes conseqüências:*

(a) Todo conjunto que contém um subconjunto linearmente dependente é LD.

(b) Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é LI.

(c) Todo conjunto que contém o elemento neutro, 0_V, é linearmente dependente.

(d) Um conjunto S de vetores é linearmente independente se, e somente se, todo subconjunto finito de S é linearmente independente, isto é, se, e somente se, para quaisquer elementos distintos $v_1, \cdots, v_n$ em S, com

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$$

implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

(e) Convencionaremos que o conjunto vazio, $\emptyset \subset V$, é linearmente independente.

Teorema 2.5.1 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* $v_1, \cdots, v_n \in V$. *O conjunto* $S = \{ v_1, \cdots, v_n \} \subset V$ *é Linearmente Dependente (LD) se, e somente se, um de seus elementos for uma combinação linear dos outros elementos.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 2.5.1 *O conjunto* $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *onde*

$$v_1 = (1,1,0) \quad , \quad v_2 = (1,4,5) \quad e \quad v_3 = (3,6,5)\,,$$

é linearmente dependente no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear nula $x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \\ & & 5y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Assim, obtemos que o sistema possui infinitas soluções não nulas, provando que o conjunto S é linearmente dependente.

Podemos verificar facilmente que $v_3 = 2v_1 + v_2$. Assim, utilizando o resultado do Teorema 2.5.1, obtemos que o conjunto S é linearmente dependente.

Exemplo 2.5.2 *O conjunto* $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *onde*

$$v_1 = (1,2,3) \quad , \quad v_2 = (1,4,9) \quad e \quad v_3 = (1,8,27)\,,$$

é linearmente independente no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear nula $x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 8z & = & 0 \\ 3x & + & 9y & + & 27z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & 2y & + & 6z & = & 0 \\ & & & & 6z & = & 0 \end{array} \right.$$

Assim, obtemos que o sistema linear homogêneo possui somente a solução nula, isto é, $x = y = z = 0$, provando que o conjunto S é linearmente independente.

Definição 2.5.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([a,b])$*. Dizemos que o conjunto de funções* $S = \{ f_1(x), \cdots, f_n(x) \} \subset \mathcal{C}([a,b])$ *é* ***Linearmente Dependente****, se existirem escalares* $c_1, \cdots, c_n$*, não todos nulos, tais que*

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \quad ; \quad \forall\ x \in [a,b]\,.$$

O conjunto S *é* ***Linearmente Independente*** *se não for Linearmente Dependente.*

Exemplo 2.5.3 *O conjunto* $S = \{ 1, \cos(x), \cos(2x) \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$*.*

Considere a combinação linear nula

$$\alpha + \beta \cos(x) + \lambda \cos(2x) = 0 \quad ; \quad \forall\, x \in [-\pi,\pi]\,.$$

Avaliando a equação acima nos pontos $x = -\pi$, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \lambda = 0 \\ \alpha + \beta + \lambda = 0 \\ \alpha \qquad\;\; - \lambda = 0 \end{cases}$$

Agora, analisamos o conjunto solução do sistema linear homogêneo através de escalonamento. Assim, obtemos $\alpha = \beta = \gamma = 0$, provando que o conjunto S é linearmente independente em $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$, de acordo com a Definição 2.5.4.

Exemplo 2.5.4 *O conjunto* $S = \{ 1,\ x,\ x^2,\ 2 - 3x + 2x^2 \}$ *é linearmente dependente no espaço vetorial* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$*.*

Por simplicidade, vamos denotar

$$p_1(x) = 1 \quad , \quad p_2(x) = x \quad , \quad p_3(x) = x^2 \quad \text{e} \quad p_4(x) = 2 - 3x + 2x^2\,.$$

Podemos verificar facilmente que $p_4(x) = 2p_1(x) - 3p_2(x) + 2p_3(x)$. Assim, utilizando o resultado do Teorema 2.5.1, obtemos que o conjunto S é linearmente dependente.

Exemplo 2.5.5 *O conjunto* $S = \{ \cos^2(x), \sin^2(x), 1 \}$ *é linearmente dependente no espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$*. De fato, fazendo uso da identidade trigonométrica*

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

obtemos o resultado desejado.

A seguir, iniciamos a apresentação de uma caracterização para que um conjunto de funções

$$S = \{ f_1(x), f_2(x), \cdots , f_n(x) \}$$

seja linearmente dependente em um determinado intervalo.

Teorema 2.5.2 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}^1([a,b])$ e as funções $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$. O conjunto $S = \{ f(x), g(x) \}$ é **linearmente dependente** se, e somente se, $\det(A(x)) = 0$ para $x \in [a,b]$, onde a matriz $A(x)$ é dada por*

$$A(x) = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix} \quad ; \quad x \in [a,b] .$$

*O determinante da matriz A é denominado **wronskiano** das funções f e g, que vamos denotar por $\mathbf{W}(f,g)(x)$.*

Demonstração – Vamos considerar a combinação linear nula

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \quad ; \quad \forall \; x \in [a,b] .$$

Considerando a equação acima e a sua derivada com relação à x, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \\ c_1 f'(x) + c_2 g'(x) = 0 \end{cases} .$$

Sabemos que o sistema linear homogêneo possui solução não nula se, e somente se, o determinante da matriz do sistema linear for igual à zero, isto é,

$$\mathbf{W}(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \forall \; x \in [a,b] .$$

Assim, completamos a demonstração. ■

Exemplo 2.5.6 *Vamos utilizar o resultado do Teorema 2.5.2 para mostrar que as funções $f(x) = \exp(x)$ e $g(x) = x\exp(x)$ são linearmente independentes para $x \in \mathbb{R}$.*

Podemos observar facilmente que as funções f e g são continuamente diferenciáveis para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos calcular o wronskiano das funções f e g

$$\mathbf{W}(f,g)(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1 + x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Assim, obtemos o resultado desejado.

Exemplo 2.5.7 *As funções* $f(x) = \sin(x)$ *e* $g(x) = x\sin(x)$ *são linearmente independentes para* $x \in I\!R$. *De fato, o wronskiano* $\mathbf{W}(f,g)(x) = -(\sin(x))^2$ *não é sempre nulo para* $x \in I\!R$.

A seguir, vamos apresentar uma extensão do Teorema 2.5.2, que o leitor poderá facilmente generalizar para um conjunto com n funções que sejam $(n-1)$ vezes continuamente diferenciáveis para $x \in [a,b]$.

Teorema 2.5.3 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}^2([a,b])$ *e as funções* $f,\ g,\ h \in \mathcal{C}^2([a,b])$. *O conjunto* $S = \{ f(x),\ g(x),\ h(x) \}$ *é* ***linearmente dependente*** *se, e somente se,* $\mathbf{W}(f,g,h)(x) = 0$ *para* $x \in [a,b]$, *onde o wronskiano* $\mathbf{W}(f,g,h)(x)$ *é definido por*

$$\mathbf{W}(f,g,h)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix}$$

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 2.5.8 *Vamos utilizar o resultado do Teorema 2.5.3 para mostrar que as funções* $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ *e* $h(x) = \cos(x)$ *são linearmente independentes para* $x \in I\!R$.

Podemos observar facilmente que as funções f , g e h são duas vezes continuamente diferenciáveis para todo $x \in I\!R$. Vamos calcular o wronskiano $\mathbf{W}(f,g,h)(x)$

$$\mathbf{W}(f,g)(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & -\cos(x) \end{vmatrix} = -1 \qquad \text{para} \qquad x \in I\!R\,.$$

Assim, obtemos o resultado desejado.

Exemplo 2.5.9 *Podemos verificar facilmente que as funções*

$$f(x) = \sin(x) \qquad e \qquad g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

são linearmente dependentes para $x \in I\!R$. *De fato, basta utilizar a Definição 2.5.4 e a identidade trigonométrica para o cosseno da diferença.*

Exercícios

Exercício 2.33 *Verifique quais dos subconjuntos*

(a) $\{ (1,0,0) \, , \, (0,1,0) \, , \, (0,0,1) \, , \, (2,2,5) \}$

(b) $\{ (1,1,1) \, , \, (1,2,1) \, , \, (3,2,-1) \}$

são linearmente independentes no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2.34 *Verifique quais dos subconjuntos*

(a) $\{ 1 \, , \, x - 1 \, , \, x^2 + 2x + 1 \, , \, x^2 \}$

(b) $\{ x(x-1) \, , \, x^3 \, , \, 2x^3 - x^2 \, , \, x \}$

são linearmente independentes no espaço vetorial real $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Exercício 2.35 *Mostre que o conjunto*

$$\gamma = \{ (1,0,0,-1), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (1,0,0,1) \}$$

é linearmente independente no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Exercício 2.36 *Considere as seguintes funções* $f(x) = x$ *e* $g(x) = |\,x\,|$. *Mostre que o conjunto* $S = \{ f(x), g(x) \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial* $\mathcal{C}([-1,1])$.

Exercício 2.37 *Considere as seguintes funções* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x\,|\,x\,|$. *Mostre que o conjunto* $S = \{ f(x), g(x) \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial real* $\mathcal{C}([-1,1])$. *Entretanto, é linearmente dependente em* $\mathcal{C}([0,1])$ *e em* $\mathcal{C}([-1,0])$.

Exercício 2.38 *Determine três elementos de* $\mathbb{R}^3$ *que sejam linearmente dependentes e tais que dois quaisquer sejam linearmente independentes.*

Exercício 2.39 *Considere* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$. *Mostre que se dois elementos de* V *são linearmente dependentes, então um é múltiplo escalar do outro.*

Exercício 2.40 *Mostre que o conjunto* $S = \{ 1, e^x, xe^x \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Exercício 2.41 *Mostre que o conjunto* $S = \{ 1, e^x, e^{2x} \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

2.6 Bases e Dimensão

Passamos agora à tarefa de atribuir uma dimensão a certos espaços vetoriais. Apesar de associarmos usualmente **dimensão** a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada da dimensão de um espaço vetorial. Isto será feito através do conceito de uma base para o espaço vetorial.

Definição 2.6.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma* ***base*** *de V é um conjunto linearmente independente de elementos de V que gera V.*

Exemplo 2.6.1 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. O conjunto*

$$\beta = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,01) \}$$

é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ e gera o espaço $\mathbb{R}^3$. Logo, β é uma base para $\mathbb{R}^3$, denominada base canônica.

Exemplo 2.6.2 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. O conjunto*

$$\Gamma = \{ (1,1), (-1,1) \}$$

é linearmente independente em $\mathbb{R}^2$ e gera o espaço $\mathbb{R}^2$. Logo, Γ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.6.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ finitamente gerado pelos elementos do conjunto $S = \{ v_1, \cdots, v_n \}$. Então, podemos extrair do conjunto S uma base para V.*

Demonstração – Se $v_1, \cdots, v_n \in V$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições de base, e não temos nada a fazer. Se $v_1, \cdots, v_n \in V$ são linearmente dependentes, então existe um combinação linear nula

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$$

com os coeficientes c_i não todos nulos. Digamos que $c_n \neq 0$. Desse modo, temos que

$$v_n = -\frac{c_1}{c_n} v_1 - \cdots - \frac{c_{n-1}}{c_n} v_{n-1}$$

Assim, os elementos $v_1, \cdots, v_{n-1}$ ainda geram V. Se $\{ v_1, \cdots, v_{n-1} \}$ for linearmente dependente, repetimos o processo anterior e extraímos o elemento, digamos v_{n-1}, que é uma combinação linear dos outros. Repetindo esse processo um número finito de vezes, obtemos um subconjunto de $\{ v_1, \cdots, v_n \}$ formado com $m < n$ elementos linearmente independentes $\{ v_1, \cdots, v_m \}$ que ainda geram V. Assim, obtemos uma base para o espaço vetorial V. ∎

Teorema 2.6.2 *Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de elementos $v_1, \cdots, v_n \in V$. Então, todo conjunto linearmente independente de V é finito e contém no máximo n elementos.*

Demonstração – Para provar o teorema, basta mostrar que todo subconjunto W de V que contém mais de n elementos é linearmente dependente. Seja W um tal conjunto. Em W existem elementos distintos $w_1, \cdots, w_m$ com $m > n$. Como $v_1, \cdots, v_n$ geram V, existem escalares c_{ij} tais que

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots, m$$

Consideramos agora um combinação linear dos elementos de W, isto é,

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \alpha_j \right) v_i$$

Como $m > n$, podemos encontrar escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, não todos nulos, solução do sistema linear homogêneo

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \alpha_j = 0 \qquad ; \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Logo, $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m = 0_V$. Portanto, mostramos que W é um conjunto linearmente dependente em V. ■

Definição 2.6.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que V é um espaço vetorial de* ***dimensão finita*** *se V possui uma base finita.*

Exemplo 2.6.3 *Vamos denotar por $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios reais, com a operação usual de adição de polinômios e a operação usual de multiplicação de um polinômio por um escalar. Assim, podemos mostrar facilmente que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real. Entretanto, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não possui uma base finita.*

De fato, dado um conjunto $S = \{ p_1(x), \cdots, p_n(x) \}$, considerando que o elemento $p_n(x)$ seja o polinômio de maior grau em S. Desse modo, qualquer elemento $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é escrito como

$$p(x) = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + \cdots + c_n p_n(x)$$

e seu grau é sempre menor ou igual ao grau do elemento $p_n(x)$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ contém todos os polinômios reais, existem polinômios em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de grau maior que o grau do elemento $p_n(x)$. Portanto, temos que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \neq [S]$ para todo conjunto finito $S \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

O resultado a seguir, será necessário para que possamos apresentar uma definição algébrica adequada de dimensão de um espaço vetorial.

Corolário 2.6.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então, quaisquer duas bases de V têm o mesmo número (finito) de elementos.*

Demonstração – Vamos supor que

$$\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \{ w_1, \cdots, w_m \}$$

sejam duas bases finitas para V.

Como $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ gera V e $\gamma = \{ w_1, \cdots, w_m \}$ é linearmente independente em V, pelo Teorema 2.6.2 temos que $m \leq n$.

Por outro lado, como $\gamma = \{ w_1, \cdots, w_m \}$ gera V e $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ é linearmente independente em V, pelo Teorema 2.6.2 temos que $n \leq m$. Portanto, mostramos que $m = n$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.6.4 *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Podemos verificar facilmente que os conjuntos $\beta = \{ (1,0), (0,1) \}$ e $\Gamma = \{ (1,1), (1,-1) \}$ são duas bases para o $\mathbb{R}^2$.*

Definição 2.6.3 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, que possui uma base com n elementos. A **dimensão** de V é definida como sendo o número de elementos de uma base de V. Indicaremos a dimensão do espaço vetorial V por $\dim(V) = n$. No caso em que $V = \{ 0_V \}$, temos que o conjunto vazio, $\emptyset \subset V$, é uma base de V e dizemos que o espaço vetorial V tem dimensão nula.*

Exemplo 2.6.5 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Temos que o conjunto*

$$\beta = \{ 1, x, x^2, \cdots, x^n \}$$

é uma base para $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, denominada base canônica. Assim, $\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = (n + 1)$.

Exemplo 2.6.6 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Temos que o conjunto*

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Desse modo, $\dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

Corolário 2.6.2 *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Então,*

(a) Todo conjunto de elementos em V que contém mais de n elementos é LD.

(b) Nenhum conjunto contendo menos de n elementos pode gerar V.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Lema 2.6.1 *Seja S um subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V. Seja u um elemento em V que não esteja no subespaço gerado por S. Então, o conjunto obtido acrescendo-se o elemento u a S é linearmente independente.*

Demonstração – Suponhamos que $v_1, \cdots, v_n$ sejam elementos distintos de S e que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n + \alpha u = 0_V .$$

Então, $\alpha = 0$. Caso contrário

$$u = -\frac{c_1}{\alpha} v_1 - \cdots - -\frac{c_n}{\alpha} v_n$$

e u estaria no subespaço gerado por S. Assim, tem–se que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$$

e como S é um conjunto linearmente independente, cada escalar $c_i = 0$, o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.6.3 (Completamento) *Seja S um subconjunto linearmente independente de elementos de um espaço vetorial V de dimensão finita. Então, S pode ser completado de modo a formar uma base para V.*

Demonstração – Sejam $dim(V) = n$ e $S = \{ v_1, \cdots, v_r \}$ linearmente independente. Note que pelo Teorema 2.6.2, temos que $r \leq n$. Se $V = [v_1, \cdots, v_r]$, então S é uma base de V e não temos nada a fazer.

Se existe $v_{r+1} \in V$ tal que $v_{r+1} \notin [v_1, \cdots, v_r]$, então pelo Lema 2.6.1 temos que $[v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}]$ é linearmente independente. Se $V = [v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}]$, então $\{ v_1, \cdots, v_r, v_{r+1} \}$ é uma base de V e não temos nada a fazer. Caso contrário, existe $v_{r+2} \in V$ tal que $v_{r+2} \notin [v_1, \cdots, v_r, v_{r+2}]$ e, então $[v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}]$ é linearmente independente. Se $V = [v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}]$ nossa prova está concluída. Caso contrário, prosseguimos com o mesmo processo. Como não podemos ter mais do que n elementos linearmente independente em V, após um número finito de passos teremos encontrado uma base para o espaço vetorial V que contém o conjunto original S, o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.6.4 *Seja* U *um subespaço vetorial de um espaço vetorial* V *de dimensão finita. Então, todo subconjunto de* U *que é linearmente independente, é finito e é parte de uma base (finita) de* U.

Demonstração – Suponhamos que S_0 seja um subconjunto de U linearmente independente . Se S é um subconjunto de U linearmente independente contendo S_0, então S também é um subconjunto de V linearmente independente. Como V tem dimensão finita, S contém no máximo $dim(V)$ elementos. Portanto, existe um subconjunto S de U linearmente independente que é maximal e contém S_0. Como S é um subconjunto de U linearmente independente e maximal contendo S_0, o Lema 2.6.1 mostra que U é o subespaço gerado por S. Logo, S é uma base de U e o conjunto original S_0 é parte de uma base de U, o que completa a demonstração. ■

Corolário 2.6.3 *Seja* U *um subespaço vetorial próprio de um espaço vetorial* V *de dimensão finita. Então,* U *é de dimensão finita e* $dim(U) < dim(V)$.

Demonstração – Suponhamos que U contém um elemento $u \neq 0_V$. Pelo Teorema 2.6.4 e sua demonstração, existe uma base para U que contém o elemento u e no máximo $dim(V)$ elementos. Logo, U é de dimensão finita e $dim(U) \leq dim(V)$. Como U é um subespaço próprio, existe um elemento u_1 em V que não está em U. Acrescentando o elemento u_1 a uma base de U obtemos um subconjunto de V linearmente independente. Portanto, provamos que $dim(U) < dim(V)$. ■

Corolário 2.6.4 *Num espaço vetorial* V *de dimensão finita todo conjunto linearmente independente, não vazio, é parte de uma base de* V.

Teorema 2.6.5 *Sejam* U *e* W *subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial* V. *Então, o subespaço* $U + W$ *é de dimensão finita e tem–se que*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Demonstração – Pelo Teorema 2.6.4 e seus Corolários, temos que o subespaço $U \cap W$ possui uma base finita $\{ v_1, \cdots, v_r \}$ que é parte de uma base

$$\{ v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m \}$$

do subespaço U, e parte de uma base

$$\{ v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_n \}$$

do subespaço W.

O subespaço $U + W$ é gerado pelos elementos do conjunto

$$\{ v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n \}$$

que é um conjunto linearmente independente em V.

De fato, considere a combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j + \sum_{k=1}^{n} c_k w_k = 0_V$$

Então, tem–se que

$$-\sum_{k=1}^{n} c_k w_k = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j$$

o que mostra que o elemento

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^{n} c_k w_k \in U$$

Como o elemento $\hat{u}$ também pertence a W, isto é, $\hat{u} \in U \cap W$, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k w_k = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \implies \sum_{k=1}^{n} c_k w_k - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0_V$$

para certos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. Como o conjunto

$$\{ v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_n \}$$

é linearmente independente, cada um dos escalares $c_k = 0$. Portanto, obtemos que

$$\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j = 0_V .$$

Como o conjunto $\{ v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m \}$ é linearmente independente, temos que cada um dos escalares $a_i = 0$ e $b_j = 0$. Assim, mostramos que o conjunto

$$\{ v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n \}$$

é uma base para o subespaço vetorial $U + W$.

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} dim(U) + dim(W) &= (r + m) + (r + n) \\ &= r + (r + m + n) \\ &= dim(U \cap W) + dim(U + W) , \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

Proposição 2.6.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço de V. Então, existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$.*

Demonstração – Seja $\{ w_1 , \cdots , w_m \}$ uma base para o subespaço W. Pelo Teorema do completamento, podemos completar a base de W para obter uma base de V, isto é,

$$\{ w_1 , \cdots , w_m , w_{m+1} , \cdots , w_n \}$$

é uma base para V.

Assim, vamos considerar U o subespaço gerado pelo conjunto linearmente independente $\{ w_{m+1} , \cdots , w_n \}$, que satisfaz as propriedades desejadas.

De fato, é evidente que $V = U + W$, pois o conjunto

$$\{ w_1 , \cdots , w_m , w_{m+1} , \cdots , w_n \}$$

é linearmente independente e gera V. Por outro lado, como

$$W = [w_1 , \cdots , w_m] \qquad , \qquad U = [w_{m+1} , \cdots , w_n]$$

e o conjunto $\{ w_1 , \cdots , w_m , w_{m+1} , \cdots , w_n \}$ é linearmente independente, temos que $W \cap U = \{ 0_V \}$, o que completa a demonstração. ■

Proposição 2.6.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço de V. Se $dim(W) = dim(V)$, então $W = V$.*

Demonstração – Sabemos que W tem uma base. Toda base de W também é uma base de V devido ao fato que $dim(W) = dim(V)$. Logo, todo elemento de V também pertence a W. Assim, $V \subset W$ e, como $W \subset V$, segue–se que $V = W$. ■

Exemplo 2.6.7 *O conjunto* $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *onde*

$$v_1 = (1, 0, -1) \quad , \quad v_2 = (1, 2, 1) \quad e \quad v_3 = (0, -3, 2) \, ,$$

é uma base para o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*.*

Devemos mostrar que S é linearmente independente e que gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Inicialmente, vamos mostrar que o conjunto S é linearmente independente. Considerando a combinação linear nula $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2b - 3c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2b - 3c = 0 \\ 5c = 0 \end{cases}$$

Assim, obtemos que o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial, isto é, $a = b = c = 0$, provando que o conjunto S é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, vamos mostrar que S gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, isto é, que todo elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é escrito como uma combinação linear dos elemento do conjunto S

$$(x, y, z) = a(1, 0, -1) + b(1, 2, 1) + c(0, -3, 2) \, .$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2b - 3c = y \\ -a + b + 2c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = x \\ 2b - 3c = y \\ 5c = z + x - y \end{cases}$$

Portanto, podemos obter de modo único os coeficientes da combinação linear, a, b e c, em função das componentes do elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim, provamos que $\mathbb{R}^3 = [S]$. Logo, o conjunto S é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.6.8 *Seja* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial das matrizes reais de ordem* 2. *Mostre que a* $dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ *exibindo uma base* $\beta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Podemos mostrar facilmente que tomando as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o conjunto $\beta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Assim, temos que $dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

Exemplo 2.6.9 *Considerando* $\mathbb{C} = \{ z = a + bi \;/\; a, b \in \mathbb{R} \}$ *como um espaço vetorial real, temos que o conjunto* $\beta = \{1, i\}$ *é uma base de* $\mathbb{C}$.

Sabemos que todo elemento $z \in \mathbb{C}$ é escrito como uma combinação linear dos elementos do conjunto β, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Além disso, o conjunto β é linearmente independente. De fato, considere a combinação linear nula $a + bi = 0 + 0i$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Desse modo, temos que $a = b = 0$. Portanto, mostramos que o conjunto β é uma base para $\mathbb{C}$ como espaço vetorial real. Desse modo, temos que $dim(\mathbb{C}) = 2$.

Exemplo 2.6.10 *Considere* $\mathbb{C}$ *um espaço vetorial complexo. Qual é a dimensão de* $\mathbb{C}$*?*

Neste caso, podemos verificar facilmente que o conjunto $\beta = \{1\}$ é uma base para $\mathbb{C}$. Assim, temos que $dim(\mathbb{C}) = 1$.

Exemplo 2.6.11 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial complexo, temos que o conjunto* $\beta = \{e_1, e_2\}$, *onde* $e_1 = (1,0)$ *e* $e_2 = (0,1)$, *é uma base de* $\mathbb{C}^2$.

Podemos verificar facilmente que todo elemento de $\mathbb{C}^2$ é escrito como uma combinação linear dos elementos de β, com coeficientes em $\mathbb{C}$, isto é,

$$(z_1, z_2) = z_1 e_1 + z_2 e_2 \quad ; \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Além disso, sabemos que β é linearmente independente. Assim, temos que β é uma base para $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial complexo. Logo, temos que $dim(\mathbb{C}^2) = 2$.

Exemplo 2.6.12 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial real, exibir uma base.*

Neste caso, podemos verificar facilmente que o conjunto $\beta = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ onde

$$e_1 = (1,0) \quad , \quad e_2 = (i,0) \quad , \quad e_3 = (0,1) \quad \text{e} \quad e_4 = (0,i)$$

é linearmente independente e que todo elemento de $\mathbb{C}^2$ é escrito como uma combinação linear dos elementos de β, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Assim, β é uma base para $\mathbb{C}^2$. Logo, temos que $dim(\mathbb{C}^2) = 4$.

Exemplo 2.6.13 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial complexo, temos que o conjunto* $S = \{ (1-i,\ i),\ (2,\ -1+i) \}$ *é linearmente dependente.*

Considerando a combinação linear nula

$$z_1(1-i,\, i) \;+\; z_2(2,\, -1+i) \;=\; (0,\, 0) \qquad ; \qquad z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (1-i)z_1 \;+\; 2z_2 \;=\; 0 \\ iz_1 \;+\; (-1+i)z_2 \;=\; 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 \;+\; (i+1)z_2 \;=\; 0 \\ iz_1 \;+\; (-1+i)z_2 \;=\; 0 \end{cases}$$

Note que, o segundo sistema linear homogêneo foi obtido somando a segunda equação à primeira equação.

Tomando o segundo sistema linear homogêneo, multiplicamos a primeira equação por $-i$ e somamos à segunda equação. Assim, ficamos somente com a primeira equação

$$z_1 \;+\; (i+1)z_2 \;=\; 0$$

que possui infinitas soluções não nulas, $z_1 = -(i+1)z_2\,,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Portanto, o conjunto S é linearmente dependente.

Exemplo 2.6.14 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial real, temos que o conjunto* $S = \{ (1-i,\, i),\, (2,\, -1+i) \}$ *é linearmente independente.*

Considerando a combinação linear nula

$$a(1-i,\, i) \;+\; b(2,\, -1+i) \;=\; (0,\, 0) \qquad ; \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (1-i)a \;+\; 2b \;=\; 0 \\ ia \;+\; (-1+i)b \;=\; 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \;+\; (i+1)b \;=\; 0 \\ ia \;+\; (-1+i)b \;=\; 0 \end{cases}$$

Como $a,\, b \in \mathbb{R}$, temos que o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial, $a = b = 0$. Desse modo, mostramos que o conjunto S é linearmente independente.

Exemplo 2.6.15 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + 3z = 0 \}$$

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine uma base para o subespaço $U + W$.

Do Exemplo 2.4.9, sabemos que o subespaço $U + W$ tem como um sistema de geradores os seguintes elementos

$$v_1 = (-1,0,1) \quad , \quad v_2 = (-1,1,0) \quad , \quad v_3 = (2,1,0) \quad \text{e} \quad v_4 = (-3,0,1)$$

dentre os quais vamos escolher uma base para o subespaço. Construímos uma matriz cujas linhas são os elementos do sistema de geradores e procedemos com o escalonamento

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, temos que $dim(U + W) = 3$. Podemos escolher uma base para o subespaço $U + W$ um dos seguintes conjuntos

$$\{ (-1,0,1), (-1,1,0), (2,1,0) \} \qquad \text{ou} \qquad \{ (-1,0,1), (0,1,-1), (0,0,3) \}$$

Note que, qualquer base de $\mathbb{R}^3$ é uma base para o subespaço $U + W$.

Do Exemplo 2.4.6, sabemos que o subespaço $U \cap W = [(-5,2,3)]$. Desse modo, temos que $\mathbb{R}^3 = U + W$, entretanto, não como soma direta.

Exemplo 2.6.16 *Considere a seguinte Equação Diferencial Ordinária (EDO)*

$$u''(x) + u(x) = 0 .$$

Sabemos que as funções $u_1(x) = \sin(x)$ *e* $u_2 = \cos(x)$ *são duas soluções linearmente independentes da EDO, isto é, as funções* $u_1(x)$ *e* $u_2(x)$ *satisfazem a EDO e o conjunto* $\Gamma = \{ u_1(x), u_2(x) \}$ *é linearmente independente para* $x \in \mathbb{R}$. *Além disso, temos que toda solução da EDO é uma combinação linear dessas duas funções. Desse modo, o conjunto* Γ *é uma base para o espaço solução da EDO.*

Exemplo 2.6.17 *Considere os seguintes subespaços de* $I\!R^3$

$$U = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ x = z \}$$

$$W = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine uma base para o subespaço $U + W$.

Do Exemplo 2.4.5, sabemos que o subespaço $U + W$ tem como um sistema de geradores os seguintes elementos

$$v_1 = (1,0,1) \quad , \quad v_2 = (0,1,0) \quad , \quad v_3 = (-1,1,0) \quad \text{e} \quad v_4 = (-1,0,1)$$

dentre os quais vamos escolher uma base para o subespaço. Construímos uma matriz cujas linhas são os elementos do sistema de geradores e procedemos com o escalonamento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, temos que $dim(U+W) = 3$. Podemos escolher como base para o subespaço $U + W$ um dos seguintes conjuntos

$$\{ (1,0,1), (0,1,0), (-1,1,0) \} \qquad \text{ou} \qquad \{ (1,0,1), (0,1,0), (0,0,1) \}$$

Do Exemplo 2.4.5, sabemos que o subespaço $U \cap W = [(1,-2,1)]$. Desse modo, temos que $I\!R^3 = U + W$, entretanto, não como soma direta.

Exemplo 2.6.18 *O conjunto* $\Gamma = \{ (1,2), (1,-1) \}$ *é uma base para o* $I\!R^2$.

Podemos verificar facilmente que Γ é linearmente independente, pois cada um de seus elementos não é múltiplo escalar do outro. Dado um elemento $u = (x,y) \in I\!R^2$, vamos mostrar que u pode ser escrito de modo único como $u = a(1,2) + b(1,-1)$ para $a, b \in I\!R$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2a - b = y \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = x \\ 3a = x + y \end{cases}$$

Assim, temos que

$$a = \frac{x + y}{3} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{2x - y}{3},$$

obtidos de modo único, em função das componentes do elemento $u \in I\!R^2$.

Exemplo 2.6.19 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^5$. *Determine uma base para o subespaço vetorial de* $I\!R^5$ *dado por:*

$$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in I\!R^5 \; / \; x_1 + x_3 + x_5 = 0 \quad e \quad x_2 = x_4 \} .$$

Temos que $x_1 = -x_3 - x_5$ e $x_2 = x_4$. Assim, temos que os elementos

$$\begin{aligned} w_1 &= (-1, 0, 1, 0, 0) \\ w_2 &= (-1, 0, 0, 0, 1) \\ w_3 &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

formam uma base para o subespaço W. Desse modo, $dim(W) = 3$.

Exemplo 2.6.20 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!R)$. *Determine uma base para o subespaço vetorial de* $\mathcal{P}_3(I\!R)$ *dado por:*

$$S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(I\!R) \; / \; p(-1) = 0 \quad e \quad p'(1) = 0 \} .$$

Vamos tomar um elemento $p \in \mathcal{P}_3(I\!R)$ escrito da seguinte forma

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Impondo as restrições $p(-1) = p'(1) = 0$, obtemos as seguintes equações algébricas

$$\begin{aligned} p(-1) &= a - b + c - d = 0 \\ p'(1) &= b + 2c + 3d = 0 \end{aligned}$$

Podemos observar que o sistema linear homogêneo possui dois graus de liberdade. Assim, $dim(S) = 2$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} a &= -3c - 2d \\ b &= -2c - 3d \end{aligned}$$

Assim, todo elemento $p \in S$ é escrito da seguinte forma

$$p(x) = c(-3 - 2x + x^2) + d(-2 - 3x + x^3) \quad , \quad c, d \in I\!R$$

Portanto, mostramos que o subespaço S é gerado pelos elementos do conjunto

$$\Gamma = \{ -3 - 2x + x^2, -2 - 3x + x^3 \} ,$$

que é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(I\!R)$, pois os elementos não são múltiplos escalares. Logo, como $dim(S) = 2$, o conjunto Γ é uma base para o subespaço S.

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!R)$ pertença ao subespaço S.

Exemplo 2.6.21 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$. *Os polinômios*

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - 2x^2 + x^3 \\ q(x) &= 3 - x + 4x^2 \\ r(x) &= -2 + 3x \\ s(x) &= x - 3x^3 \end{aligned}$$

formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$ *? Justifique sua resposta.*

Considerando que $dim(\mathcal{P}_3(I\!\!R)) = 4$, basta verificar se o conjunto

$$\{ p(x), q(x), r(x), s(x) \}$$

é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$. Tomando a combinação linear nula

$$a(1 - 2x^2 + x^3) + b(3 - x + 4x^2) + c(-2 + 3x) + d(x - 3x^3) = 0$$

e organizando os termos de mesma ordem, obtemos

$$(a + 3b - 2c) + (-b + 3c + d)x + (-2a + 4b)x^2 + (a - 3d)x^3 = 0$$

Desse modo, temos um sistema linear homogêneo nas incógnitas a, b, c, d cuja matriz é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Agora temos que analisar o tipo do conjunto solução do sistema linear homogêneo através do posto da matriz A. Utilizando o processo de escalonamento encontramos a seguinte matriz triangular superior reduzida por linhas

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -86 \end{bmatrix}$$

Como o $posto(A) = 4$, temos que o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial $a = b = c = d = 0$. Logo, o conjunto $\{ p(x), q(x), r(x), s(x) \}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$.

Exemplo 2.6.22 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_4(I\!R)$. *Determine uma base para* $\mathcal{P}_4(I\!R)$ *contendo elementos do conjunto* $S = \{ p(x), q(x), r(x) \}$, *onde*

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 2x^4 \\ q(x) &= 2 + 4x + x^2 + 6x^3 + 3x^4 \\ r(x) &= 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 \end{aligned}$$

Os elementos $p(x), q(x), r(x)$ estão escritos em relação à base canônica

$$\beta = \{ 1, x, x^2, x^3, x^4 \}.$$

Inicialmente, vamos construir uma matriz A cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ com relação à base canônica, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuamos o escalonamento na matriz A obtendo uma matriz triangular superior reduzida por linhas

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da qual podemos concluir que o conjunto S é linearmente independente em $\mathcal{P}_4(I\!R)$.

Finalmente, construímos uma matriz M de ordem 5×5 a partir da matriz $\hat{A}$ na forma escalonada acrescentando linhas na matriz $\hat{A}$ que são as coordenadas de elementos da base canônica escolhidos de modo conveniente

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $\gamma = \{ p(x), q(x), r(x), x, x^3 \}$ é uma base para o espaço $\mathcal{P}_4(I\!R)$ contendo os elementos do conjunto S.

Exemplo 2.6.23 *Considere o espaço vetorial real* $I\!M_{3\times 2}(I\!R)$. *Determine uma base para* $I\!M_{3\times 2}(I\!R)$ *contendo elementos do conjunto* $S = \{ A_1, A_2, A_3 \}$, *onde*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 11 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

A base canônica para o espaço vetorial $I\!M_{3\times 2}(I\!R)$ é dada por

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Logo, temos que $dim(I\!M_{3\times 2}(I\!R)) = 6$.

Inicialmente, vamos construir uma matriz A cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos A_1, A_2 e A_3 com relação à base canônica, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuamos o escalonamento na matriz A obtendo uma matriz triangular superior reduzida por linhas

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da qual podemos concluir que o conjunto $\{ A_1, A_2 \}$ é linearmente independente em $I\!M_{3\times 2}(I\!R)$, pois a matriz A_3 é uma combinação linear das matrizes A_1 e A_2.

Finalmente, construímos uma matriz M de ordem 6×6 a partir da matriz $\hat{A}$ na forma escalonada acrescentando linhas na matriz $\hat{A}$ que são as coordenadas de elementos da base canônica escolhidos de modo conveniente

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que o conjunto

$$\gamma = \left\{ A_1 \ , \ A_2 \ , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.6.24 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$. *Determine uma base para* $\mathbb{R}^4$ *contendo elementos do conjunto* $S = \{ v_1, v_2 \}$, *onde*

$$v_1 = (1, 0, -2, 2) \qquad e \qquad v_2 = (1, 2, -2, 1) \, .$$

Como nos exemplos anteriores, obtemos a matriz M de ordem 4×4 dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que o conjunto

$$\gamma = \{ (1, 0, -2, 2), (1, 2, -2, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.

Exemplo 2.6.25 *Considere o subespaço* $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 2z = 0 \}$ *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$. *Determine um subespaço* W *de modo que* $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Inicialmente, vamos encontrar uma base para o subespaço U. Podemos escrever os elementos $u \in U$ da seguinte forma:

$$u = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1) \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Portanto, $\{ (1, 1, 0), (-2, 0, 1) \}$ é uma base para o subespaço U. Finalmente, vamos completar a base de U, para obter uma base para $\mathbb{R}^3$, com o elemento $(0, 0, 1)$. Assim, obtemos o subespaço $W = [(0, 0, 1)]$. Note que esse problema possui infinitas soluções, pois podemos completar a base com um outro elemento.

Exemplo 2.6.26 *Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} U &= [(1,0,1,0),\, (0,1,0,0)] \\ W &= \{\, (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 0 \,\} \end{aligned}$$

Determine $dim(U + W)$ *e* $dim(U \cap W)$.

Podemos verificar facilmente que os elementos $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$ formam uma base para o subespaço U. Logo, $dim(U) = 2$. Para o subespaço W temos a seguinte base

$$\{\, (-1,1,0,0),\, (0,0,1,0),\, (0,0,0,1) \,\}$$

portanto, $dim(W) = 3$. Vamos agora determinar a dimensão do subespaço $U + W$, para isso construímos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuamos o escalonamento na matriz A obtendo uma matriz triangular superior reduzida por linhas

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, temos que $dim(U + W) = 4$.

Considerando o resultado do Teorema 2.6.5, temos que

$$dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U + W) = 2 + 3 - 4 = 1$$

Assim, obtemos que $dim(U \cap W) = 1$.

Exemplo 2.6.27 *Sejam U e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$, com $U \neq W$, tais que $dim(U) = 3$ e o subespaço $U \cap W = [v_1, v_2, v_3]$, onde*

$$v_1 = (1,2,1,0) \quad , \quad v_2 = (-1,1,0,1) \quad e \quad v_3 = (1,5,2,1) \,.$$

Determine $dim(U \cap W)$ e as possíveis dimensões dos subespaços W e $U + W$.

Vamos determinar a dimensão do subespaço $U \cap W$. Escalonando a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos que $dim(U \cap W) = 2$. Considerando o resultado do Teorema 2.6.5, temos que

$$3 \leq dim(U + W) = 1 + dim(W) \leq 4$$

Portanto, temos que as seguintes possibilidades

- $dim(W) = 2$ e $dim(U + W) = 3$

ou

- $dim(W) = 3$ e $dim(U + W) = 4$.

Exemplo 2.6.28 *Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que o conjunto*

$$S = \{ (a,1,0), (1,a,1), (0,1,a) \}$$

seja uma base para $\mathbb{R}^3$.

Vamos encontrar os valores para a de modo que o conjunto acima seja linearmente independente. Assim, vamos construir uma matriz $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos do conjunto S, em relação à base canônica, e procedemos com o escalonamento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 - a^2 & -a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(a^2 - 2) \end{bmatrix}$$

Portanto, devemos impor que $a(a^2 - 2) \neq 0$. Assim, obtemos $a \neq 0$ e $a \neq \pm\sqrt{2}$.

De modo análogo, consideramos uma combinação linear nula dos elementos do conjunto S, obtendo um sistema linear homogêneo, e impomos a condição na matriz do sistema de modo que os coeficientes da combinação linear sejam todos nulos. Assim, obtemos os valores para o parâmetro a.

Exemplo 2.6.29 *Sejam V um espaço vetorial real, com $dim(V) = 9$, U e W subespaços vetoriais de V tais que $dim(U) = 6$ e $dim(W) = 5$. Mostre que*

$$2 \leq dim(U \cap W) \leq 5\,.$$

Considerando o resultado do Teorema 2.6.5, temos que

$$6 \leq dim(U + W) = 6 + 5 - dim(U \cap W) \leq 9$$

Assim, temos que $2 \leq dim(U \cap W) \leq 5$.

Exemplo 2.6.30 *Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned} U &= [(1,-1,2),\,(2,1,1)] \\ W &= [(1,2,1),\,(0,1,-1)] \end{aligned}$$

Determine uma base para os subespaços $U + W$ e $U \cap W$.

Podemos verificar facilmente que o conjunto $\{\,(1,-1,2),\,(2,1,1)\,\}$ é uma base para o subespaço U e que $\{\,(1,2,1),\,(0,1,-1)\,\}$ é uma base para o subespaço W. Agora vamos determinar uma base para o subespaço $U + W$ utilizando o processo de escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, o conjunto $\{\,(1,-1,2),\,(2,1,1),\,(1,2,1)\,\}$ é uma base para o subespaço $U + W$, e temos que $dim(U + W) = 3$. Considerando o resultado do Teorema 2.6.5, temos que

$$dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U + W) = 1\,.$$

Neste caso, do processo de escalonamento, podemos concluir que o elemento $(0,1,-1)$ pertence ao subespaço $U \cap W$, pois observamos que ele também pertence ao subespaço U. Logo, $\{\,(0,1,-1)\,\}$ é uma base para o subespaço $U \cap W$.

Exemplo 2.6.31 *Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $I\!R^4$

$$\begin{aligned} U &= [(1,-1,0,2),\ (-1,2,0,1)] \\ W &= [(2,1,-1,3),\ (3,-4,0,3),\ (4,5,-3,5)] \end{aligned}$$

Determine uma base para o subespaço $U + W$ *e* $dim(U \cap W)$.

Vamos determinar a dimensão do subespaço U

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

obtendo $dim(U) = 2$.

Agora, vamos determinar a dimensão do subespaço W

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 25 & -32 \end{bmatrix}$$

obtendo que $dim(W) = 3$.

Agora, vamos determinar uma base para o subespaço $U + W$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & -3 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -30 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos que o conjunto $\{ (1,-1,0,2),\ (-1,2,0,1),\ (2,1,-1,3) \}$ é uma base para o subespaço $U + W$. Logo, $dim(U + W) = 3$. Considerando o resultado do Teorema 2.6.5

$$dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U + W) = 2 + 3 - 3 = 2$$

obtemos que $dim(U \cap W) = 2$.

Exemplo 2.6.32 *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita com* $dim(V) = n$*. Se* U *e* W *são subespaços vetoriais de* V *com* $dim(U) > \frac{n}{2}$ *e* $dim(W) > \frac{n}{2}$*. Mostre que* $U \cap W \neq \{ 0_V \}$*.*

A prova é feita por absurdo, isto é, vamos negar a tese e obter uma contradição. Supondo que $U \cap W = \{ 0_V \}$, isto é, $dim(U \cap W) = 0$. Pelo Teorema 2.6.5 temos que

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) > n$$

que é uma contradição, pois $U + W$ é um subespaço vetorial de V e temos que $dim(V) = n$. Portanto, $U \cap W \neq \{ 0_V \}$.

Exemplo 2.6.33 *Considere o subespaço vetorial* $S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ / \ p(1) = 0 \}$ *do espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*. Determine uma base para* S*.*

Considerando $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com a base canônica $\{ 1, x, x^2 \}$, temos que $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é escrito de modo único como $p(x) = a + bx + cx^2$. Impondo a condição $p(1) = 0$, para que $p \in S$, obtemos a seguinte equação algébrica

$$p(1) = a + b + c = 0 \, .$$

Assim, temos que $a = -b - c$. Podemos concluir que $dim(S) = 2$, pois temos dois graus de liberdade. Logo, $p(x) \in S$ é escrito da seguinte forma:

$$p(x) = (-b - c) + bx + cx^2 = b(x - 1) + c(x^2 - 1) \, .$$

Portanto, $\{ (x - 1), (x^2 - 1) \}$ é uma base para o subespaço S.

Exemplo 2.6.34 *Considere o seguinte subespaço*

$$S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ / \ p(-1) = 0 \quad e \quad p(1) = 0 \}$$

do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*. Temos que* $dim(S) = 1$ *e o conjunto* $\Gamma = \{ x^2 - 1 \}$ *é uma base para o subespaço* S*.*

Note que o elemento da base Γ satisfaz as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pertença ao subespaço S.

Exemplo 2.6.35 *Considere o seguinte subespaço*

$$S = \{ \, p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \;\; / \;\; p'(-1) = 0 \quad e \quad p(1) = 0 \, \}$$

do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *Encontre uma base para* S.

Consideramos um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e vamos impor as condições para que esse elemento pertença ao subespaço S, isto é,

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} p'(-1) & = & & & b & - & 2c & + & 3d & = & 0 \\ p(1) & = & a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \end{array} .$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo com dois graus de liberdade. Desse modo, podemos concluir que o subespaço S tem dimensão dois. Logo, temos uma relação entre os coeficientes dos elementos $p(x) \in S$. Podemos verificar facilmente que

$$b = 2c - 3d \qquad \text{e} \qquad a = -3c + 2d$$

para $c, d \in \mathbb{R}$. Substituindo a e b no polinômio $p(x)$, obtemos que todo elemento do subespaço S é escrito como:

$$p(x) = c(-3 + 2x + x^2) + d(2 - 3x + x^3) \qquad ; \qquad c, d \in \mathbb{R} \, .$$

Portanto, mostramos que o subespaço S é gerando pelo elementos do conjunto

$$\Gamma = \{ -3 + 2x + x^2 \, , \, 2 - 3x + x^3 \} \, ,$$

que é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Logo, o conjunto Γ é uma base para o subespaço S.

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pertença ao subespaço S.

Exemplo 2.6.36 *Considere o seguinte subespaço*

$$S = \left\{ \, p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \;\; / \;\; \int_0^1 p(x)dx = 0 \, \right\}$$

do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Temos que* $dim(\, S \,) = 2$ *e o conjunto*

$$\Gamma = \left\{ \, -\frac{1}{2} + x \, , \, -\frac{1}{3} + x^2 \, \right\}$$

é uma base para o subespaço S.

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pertença ao subespaço S.

Exercícios

Exercício 2.42 *Verifique se os elementos*

$$u_1 = (1,1,1,1) \quad , \quad u_2 = (0,1,1,1) \quad , \quad u_3 = (0,0,1,1) \quad e \quad u_4 = (0,0,0,1)$$

formam uma base para o espaço vetorial real $I\!R^4$.

Exercício 2.43 *Encontre uma base para o subespaço* W *de* $I\!M_3(I\!R)$ *definido por:*

$$W = \{ A \in I\!M_3(I\!R) \ / \ A^t = -A \} .$$

Exercício 2.44 *Encontre uma base para o subespaço* W *de* $I\!M_3(I\!R)$ *definido por:*

$$W = \{ A \in I\!M_3(I\!R) \ / \ A^t = A \} .$$

Exercício 2.45 *Mostre que o conjunto* $\gamma = \{ 1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3 \}$ *é uma base para o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!R)$.

Exercício 2.46 *Determine uma base para o subespaço vetorial de* $I\!M_2(I\!R)$ *dado por:*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \ / \ x - y - z = 0 \right\} .$$

Exercício 2.47 *Determine uma base para o espaço solução do sistema linear*

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ 2x - y - 2z - t = 0 \end{cases}$$

que é um subespaço vetorial do $I\!R^4$.

Exercício 2.48 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathcal{P}_2(I\!R)$

$$U = \{ p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ a - 2c = 0 \}$$

$$W = [1-x \, , \, x-x^2]$$

Determine uma base para o subespaço $U + W$.

Exercício 2.49 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathcal{P}_2(I\!R)$

$$U = \{ p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ a - 2c = 0 \}$$

$$W = [1-x \, , \, x-x^2]$$

Determine uma base para o subespaço $U \cap W$.

Exercício 2.50 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad ; \quad a,\, b,\, c,\ \in\ \mathbb{R} \right\} \qquad e \qquad W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad ; \quad a,\, b,\, c\ \in\ \mathbb{R} \right\}.$$

Determine uma base para os subespaços U, W *e* $U \cap W$.

Exercício 2.51 *Para quais valores de* $a \in \mathbb{R}$ *o conjunto*

$$\beta \ = \ \{ \ (a,1,0)\,,\ (1,a,1)\,,\ (0,1,a) \ \}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ *?*

Exercício 2.52 *Considere a seguinte Equação Diferencial Ordinária (EDO)*

$$-u''(x) \ + \ u(x) \ = \ 0\,.$$

Mostre que as funções $u_1(x) = \exp(x)$ *e* $u_2 = \exp(-x)$ *são duas soluções linearmente independentes da EDO e que o conjunto* $\Gamma = \{\, u_1(x),\, u_2(x) \,\}$ *é uma base para o espaço solução da EDO.*

Exercício 2.53 *Mostre que uma base para o espaço vetorial real* U *definido por:*

$$U \ = \ \{ \ p(x) \ \in \ \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ \ / \ \ p(-1) \ = \ p(1) \ = \ 0 \ \}$$

é dada pelo conjunto $\gamma = \{\, 1 - x^2\,,\, x - x^3 \,\}$.

Exercício 2.54 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial* V. *Determine as condições necessária e suficiente sobre os subespaços* U *e* W *para que* $dim(U \cap W) = dim(W)$.

Exercício 2.55 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial* V *com dimensões* m *e* n, *respectivamente, onde* $m \geq n$.

(a) Prove que $dim(U \cap W) \leq n$.

(b) Prove que $dim(U + W) \leq n + m$.

Exercício 2.56 *Determine uma base para o espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$ *contendo os elementos*

$$v_1 \ = \ (1,1,1,0) \qquad e \qquad v_2 = (1,1,2,1)\,.$$

Exercício 2.57 *Mostre que os polinômios*

$$p_1(x) = 1 \,, \quad p_2(x) = 1 + x \,, \quad p_3(x) = 1 - x^2 \quad e \quad p_4(x) = 1 - x - x^2 - x^3$$

formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Exercício 2.58 *Sejam* V *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *tais que* $dim(V) = 1$, $dim(W) = 2$ *e* V *não está contido em* W. *Mostre que* $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Exercício 2.59 *Determine uma base para o espaço solução do sistema linear*

$$\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ \phantom{x - {}} 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$$

que é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$.

Exercício 2.60 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de dimensão* 3 *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$. *Considerando que*

$$U \cap W = [\, (1,2,1,0) \,, (-1,1,0,1) \,, (1,5,2,1) \,] \,.$$

Qual é a dimensão do subespaço $U + W$ *?*

Exercício 2.61 *Sejam* W *o subespaço de* $\mathbb{R}^4$ *definido por:*

$$W = \{ \, (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y = z \quad e \quad x - 3y + t = 0 \, \}$$

e U *o subespaço de* $\mathbb{R}^4$ *gerado pelos elementos* $u_1 = (1,2,1,3)$ *e* $u_2 = (3,1,-1,4)$. *Determine uma base para o subespaço* $U + W$ *e para o subespaço* $U \cap W$.

Exercício 2.62 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} U &= \{ \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 0 \, \} \\ V &= \{ \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y - 2z = 0 \, \} \\ W &= [\, (1,1,0) \,, (0,0,2) \,] \end{aligned}$$

Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços

$$U \cap V \quad , \quad V + W \qquad e \qquad U + V + W \,.$$

2.7 Coordenadas

Uma das características úteis de uma base β de um espaço vetorial V de dimensão finita é essencialmente que ela nos permite introduzir coordenadas em V de maneira análoga às *coordenadas naturais* x_i de um elemento $u = (x_1, \cdots, x_x)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, por exemplo. Assim, as coordenadas de um elemento u de V em relação a base β serão os escalares que servem para representar u como uma combinação linear dos elementos da base ordenada β.

Se β é uma base arbitrária do espaço vetorial V de dimensão n, não teremos nenhuma ordenação natural para os elementos de β e será portanto necessário impormos uma certa ordem sobre esses elementos antes de podermos definir as coordenadas de um elemento de V em relação a β.

Definição 2.7.1 *Seja S um conjunto de n elementos. Uma **ordenação** do conjunto S, é uma função do conjunto dos inteiros positivos $1, \cdots, n$ sobre o conjunto S.*

Desse modo, uma ordenação do conjunto é simplesmente uma regra para nos dizer que elemento deve ser considerado como o primeiro elemento de S, que elemento é o segundo, e assim sucessivamente.

Uma **base ordenada** de um espaço vetorial V de dimensão finita é uma base β de V, mais uma ordenação fixa dos elementos de β. Desse modo, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.7.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base ordenada de V. Então, todo elemento de V é escrito de modo único como uma combinação linear dos elementos de β, isto é, dado $u \in V$ temos que existe uma única n–upla $(c_1 , \cdots , c_n) \in \mathbb{F}^n$ tal que*

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i .$$

Dizemos que c_i é a i-ésima coordenada do elemento u com relação à base ordenada β.

Demonstração – Para mostrar a unicidade, vamos considerar que

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} (c_j - b_j) v_j = 0_V .$$

Como $\{ v_1 , \cdots , v_n \}$ é linearmente independente em V, temos que $c_j - b_j = 0$ para todo j. Logo, $c_j = b_j$ para todo j, o que completa a demonstração. ■

Observamos que, cada base ordenada β do espaço vetorial V determina uma bijeção

$$u \in V \longrightarrow (c_1 , \cdots , c_n) \in \mathbb{F}^n$$

entre o conjunto de elementos de V e o conjunto das n–uplas de $\mathbb{F}^n$.

Esta associação tem a propriedade de que o correspondente do elemento $(u + v) \in V$ é a soma em $\mathbb{F}^n$ das correspondentes n–uplas de u e v. Além disso, o correspondente do elemento $(\lambda\, u) \in V$ é o produto em $\mathbb{F}^n$ do escalar λ pela correspondente n–upla do elemento u.

Neste ponto poderíamos perguntar por que não tomar simplesmente uma base ordenada no espaço vetorial V e descrever cada elemento de V pelo seu vetor de coordenadas, visto que teríamos então a conveniência de operar apenas com elementos de $\mathbb{F}^n$. Esta atitude faria malograr nosso objetivo, por duas razões. A primeira, como indica a nossa definição de espaço vetorial, estamos aprendendo a raciocinar com espaços vetoriais com sistemas algébricos. A segunda, mesmo nos casos em que usamos coordenadas, os resultados importantes decorrem de nossa habilidade de mudar o sistema de coordenadas, isto é, mudar a base ordenada do espaço vetorial V.

Desse modo, será mais conveniente utilizar a **matriz de coordenadas** do elemento u em relação à base ordenada β, que denotamos por $[u]_\beta$, dada por:

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})$$

Esta notação será particularmente útil quando passarmos a descrever o que ocorre com as coordenadas de um elemento $u \in V$ quando fazemos a mudança de uma base ordenada para uma outra base ordenada, que é o tema da próxima seção.

Teorema 2.7.2 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *Se os vetores colunas de* A *formam um conjunto linearmente independente em* $\mathbb{R}^n$. *Então, a matriz* A *é invertível.*

Demonstração – Sejam $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ os vetores colunas da matriz A e suponhamos que W seja um subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores colunas de A. Como os vetores $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ são linearmente independentes, temos que $dim(\, W\,) = n$. Pelo Corolário 2.6.3, temos que $W = \mathbb{R}^n$. Logo, existem escalares $b_{ij} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots, n$$

onde $\{\, e_1, \cdots, e_n \,\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Desse modo, a matriz $B = [b_{ij}]$ satisfaz $A\,B = I$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.7.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *e o elemento*

$$u = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,.$$

Se $\beta = \{\, e_1, \cdots, e_n \,\}$ *é a base ordenada canônica de* $\mathbb{R}^n$, *a matriz de coordenadas do elemento* u *em relação à base* β *é dada por:*

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Para exemplificar, considere o elemento $u = (1, 2, 4, 7) \in \mathbb{R}^4$. Assim, a matriz de coordenadas de u com relação à base ordenada canônica de $\mathbb{R}^4$ é dada por:

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 2.7.2 *Podemos verificar facilmente que* $\gamma = \{ 1, 1+x, 1+x^2 \}$ *é uma base ordenada para o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*. Determine as coordenadas do elemento* $p(x) = 2 + 4x + x^2$ *em relação à base ordenada* γ*.*

Inicialmente, escrevemos o polinômio $p(x)$ como uma combinação linear dos elementos da base ordenada γ

$$p(x) = 2 + 4x + x^2 = a + b(1+x) + c(1+x^2) = (a+b+c) + bx + cx^2$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear nas incógnitas a, b e c que são as coordenadas de $p(x)$ com relação à base ordenada γ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ b &= 4 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Desse modo, temos que $a = -3$, $b = 4$ e $c = 1$. Portanto, o vetor de coordenadas do elemento p com relação à base ordenada γ é dado por:

$$[p]_\gamma = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.7.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$*. Determine as coordenadas do elemento* $u = (2,1,4) \in \mathbb{R}^3$ *com relação à base* $\gamma = \{ (1,1,1), (1,0,1), (1,0,-1) \}$*.*

Vamos escrever o elemento $u = (2,1,4) \in \mathbb{R}^3$ como uma combinação linear dos elementos da base ordenada γ

$$u = (2,1,4) = a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(1,0,-1)$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear nas incógnitas a, b e c que são as coordenadas de u com relação à base ordenada γ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ a &= 1 \\ a + b - c &= 4 \end{aligned}$$

Desse modo, temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = -1$. Portanto, o vetor de coordenadas do elemento u com relação à base ordenada γ é dado por:

$$[u]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.7.4 *Sejam* V *um espaço vetorial real e* $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ *uma base ordenada para* V*. Pede–se:*

(a) *Mostre que* $\beta = \{ v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \}$ *é uma base de* V*.*

(b) *Se o elemento* $v \in V$ *tem como vetor de coordenadas*

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

determine seu vetor de coordenadas $[v]_\beta$*.*

Vamos mostrar que β é linearmente independente em V. Para isso, vamos considerar a combinação linear nula

$$av_1 + b(v_1 + v_2) + c(v_1 + v_2 + v_3) + d(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0_V .$$

Escrevendo a combinação linear acima da seguinte forma:

$$(a + b + c + d)v_1 + (b + c + d)v_2 + (c + d)v_3 + dv_4 = 0_V$$

e utilizando a hipótese que $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ é linearmente independente em V, obtemos o seguinte sistema linear triangular superior homogêneo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & & & & c & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & 0 \end{array}$$

que tem por solução $a = b = c = d = 0$. Assim, provamos que β é linearmente independente em V. Logo, β é uma base para V.

Note que, na primeira parte da resolução, o vetor de coordenadas de um elemento $v \in V$ na base β está representado por:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

e o vetor de coordenadas do elemento $v \in V$ na base γ está representado por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a+b+c+d \\ b+c+d \\ c+d \\ d \end{bmatrix}.$$

Desse modo, para encontrar o vetor de coordenadas $[v]_\beta$, conhecendo o vetor de coordenadas $[v]_\gamma$, basta obter a solução do seguinte sistema linear triangular superior

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 4 \\ & & b & + & c & + & d & = & 3 \\ & & & & c & + & d & = & 1 \\ & & & & & & d & = & 2 \end{array}$$

Portanto, temos que

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.7.5 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *com a base ordenada* $\gamma = \{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$ *onde*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine o vetor de coordenadas $[A]_\gamma$ da matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Resposta: $\boxed{[A]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}$

Exemplo 2.7.6 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ *e o subespaço* $U = [u_1(x), u_2(x)]$, *onde* $u_1 = \exp(x)$ *e* $u_2 = \exp(-x)$. *Podemos verificar facilmente que o conjunto* $\Gamma = \{ \exp(x), \exp(-x) \}$ *é uma base ordenada para o subespaço* U. *Temos que as funções hiperbólicas*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad e \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

pertencem ao subespaço U *e cujos vetores de coordenadas em relação à base ordenada* Γ *são dados por*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad e \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Teorema 2.7.3 *Considere* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ *um conjunto finito de elementos de* V. *Se todo elemento de* V *é escrito de modo único como uma combinação linear dos elementos de* β, *então* β *é uma base de* V.

Demonstração – Como todo elemento de V é escrito como uma combinação linear dos elementos de β, temos que V é gerado pelos elementos do conjunto β. Agora basta mostrar que β é linearmente independente em V.

Considere os escalares $c_1 , \cdots , c_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0_V .$$

Temos também que

$$\sum_{i=1}^{n} 0_{\mathbb{F}} v_i = 0_V .$$

Desse modo, pela hipótese de unicidade, obtemos $c_i = 0_{\mathbb{F}}$ para $i = 1, \cdots , n$.

Portanto, β é uma base para o espaço vetorial V. ■

Exercícios

Exercício 2.63 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ 1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3 \}.$$

Encontre o vetor de coordenadas $[p]_\gamma$ *do polinômio* $p(x) = 3 - 2x - x^2$*.*

Exercício 2.64 *Considere a base* $\beta = \{ 2, a+x, 1+bx^2 \}$ *de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*. Determine as constantes* $a, b \in \mathbb{R}$ *de modo que o vetor de coordenadas do polinômio* $p(x) = x + x^2$ *em relação à base* β *seja dado por:*

$$[p]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.65 *Mostre que o conjunto* $\gamma = \{ 1, x+a, (x+a)^2 \}$*, para* $a \in \mathbb{R}$ *fixo, é uma base para o espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*.*

Exercício 2.66 *Considere a base ordenada* $\gamma = \{ 1, x+a, (x+a)^2 \}$*,* $a \in \mathbb{R}$ *fixo, do espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*. Considere que um elemento* $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *tem por vetor de coordenadas, em relação à base ordenada canônica* $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$*,*

$$[p(x)]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Determine o vetor de coordenadas do elemento $p(x)$ *em relação à base ordenada* γ*.*

Exercício 2.67 *Seja* $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *uma base ordenada para o espaço vetorial real* V*. Pede–se:*

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_2 + v_3 \}$ *é também uma base para* V*.*

(b) Considere que o vetor de coordenadas do elemento $v \in V$*, em relação à base* γ*, é dado por:*

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine o vetor de coordenadas do elemento v *em relação à base* β*.*

2.8 Mudança de Base

Teorema 2.8.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ e $\gamma = \{ w_1 , \cdots , w_n \}$ bases ordenadas para V. Então, existe uma única matriz $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ invertível tal que para todo $u \in V$ tem–se que*

(a) $[u]_\gamma = P\,[u]_\beta$ *;*

(b) $[u]_\beta = P^{-1}\,[u]_\gamma$ *.*

Demonstração – Inicialmente vamos representar cada elemento v_j da base ordenada β em relação à base ordenada γ. Pelo Teorema 2.7.1, existem escalares $p_{1j}, \cdots , p_{nj} \in \mathbb{F}$, bem definidos, tais que

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots , n\,.$$

Dado um elemento $u \in V$, sejam $c_1, \cdots , c_n \in \mathbb{F}$ suas coordenadas com relação à base ordenada β, isto é,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^{n} c_j\, v_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\, p_{ij}\, c_j\,)\, w_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, c_j \right) w_i\,. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a relação

$$u = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, c_j \right) w_i\,.$$

Como as coordenadas $b_1, \cdots , b_n$ do elemento $u \in V$ com relação à base γ são determinadas de modo único, temos que

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, c_j \qquad ; \qquad i = 1, \cdots , n\,.$$

Tomando a matriz $P = [p_{ij}]$, podemos escrever a relação acima na forma matricial $[u]_\gamma = P\,[u]_\beta$. Como β e γ são linearmente independentes em V, então $[u]_\gamma = 0$ se e somente se $[u]_\beta = 0$. Assim, temos que P é uma matriz invertível. Logo, temos que $[u]_\beta = P^{-1}\,[u]_\gamma$. A matriz $P = [p_{ij}]$ é denominada matriz de mudança da base ordenada β para a base ordenada γ, o que completa a demonstração. ■

Utilizaremos a notação $[I]^\beta_\gamma$ para a matriz de mudança da base ordenada β para a base ordenada γ.

Teorema 2.8.2 *Considere* $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *uma matriz invertível. Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* $\gamma = \{ w_1, \cdots, w_n \}$ *uma base ordenada para* V*. Então, existe uma única base ordenada* $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ *de* V *tal que*

(a) $[u]_\gamma = P\, [u]_\beta$;

(b) $[u]_\beta = P^{-1}\, [u]_\gamma$.

para todo elemento $u \in V$*.*

Demonstração – Se $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ é uma base ordenada para V para qual *(a)* é válido, é claro que

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots , n\,.$$

Desse modo, basta mostrar que os elementos v_j assim definidos formam uma base para V. Seja $Q = [q_{ij}] = P^{-1}$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} q_{jk}\, v_j &= \sum_{j=1}^{n} q_{jk} \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, q_{jk} \right) w_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, q_{jk} \right) w_i \\
&= w_k
\end{aligned}$$

Portanto, o subespaço gerado pelos elementos do conjunto β contém γ. Logo, é igual ao espaço vetorial V. Assim, β é uma base e, de sua definição e do Teorema 2.8.1, é evidente que *(a)* é válido. Logo, *(b)* também o é, o que completa a demonstração. ■

Note que a j-ésima coluna da matriz P são as coordenadas do j-ésimo elemento da base ordenada β com relação à base ordenada γ, isto é,

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots , n\,.$$

Portanto, P é a matriz de mudança da base ordenada β para a base ordenada γ, isto é, $P = [I]^{\beta}_{\gamma}$.

Exemplo 2.8.1 *Considere a matriz* $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

onde θ *é um número real. A matriz* P *é a matriz de rotação de um ângulo* θ *no sentido anti–horário. A matriz* P *é invertível e sua inversa é dada por:*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Portanto, para cada $\theta \in \mathbb{R}$*, o conjunto* $\gamma = \{ v_1, v_2 \}$ *onde*

$$v_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad e \qquad v_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$*.*

Podemos observar que a base ordenada γ *pode ser descrita como sendo a base obtida pela rotação de um ângulo* θ *da base ordenada canônica* $\beta = \{ e_1, e_2 \}$*. Assim, dado um elemento* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$*, temos que*

$$[u]_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que $[u]_\gamma = P^{-1}[u]_\beta$ *e* $[u]_\beta = P[u]_\gamma$*.*

Esse exemplo é uma excelente ilustração do Teorema 2.8.2. Para exemplificar, vamos considerar $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Desse modo, temos a base ordenada canônica $\beta = \{ (1,0), (0,1) \}$ e a base ordenada $\gamma = \{ v_1, v_2 \}$ onde

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1).$$

Neste caso, as seguintes matrizes

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

que são, respectivamente, a matriz de mudança da base ordenada γ para a base canônica β e a matriz de mudança da base canônica β para a base ordenada γ.

Exemplo 2.8.2 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$. *Determine a matriz de mudança de base,* $[I]^{\beta}_{\gamma}$, *da base canônica* $\beta = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$ *para a base ordenada* $\gamma = \{ (1,1,1), (1,0,1), (1,0,-1) \}$.

Vamos escrever cada elemento da base canônica β como uma combinação linear dos elementos da base γ

$$
\begin{array}{lllll}
e_1 & = & (1,0,0) & = & p_{11}(1,1,1) \, + \, p_{21}(1,0,1) \, + \, p_{31}(1,0,-1) \\
e_2 & = & (0,1,0) & = & p_{12}(1,1,1) \, + \, p_{22}(1,0,1) \, + \, p_{32}(1,0,-1) \\
e_3 & = & (0,0,1) & = & p_{13}(1,1,1) \, + \, p_{23}(1,0,1) \, + \, p_{33}(1,0,-1)
\end{array}
$$

obtendo três sistemas lineares, que podem ser resolvidos pelo processo de escalonamento. Assim, temos que

$$
[I]^{\beta}_{\gamma} \; = \; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

É fácil ver que

$$
[I]^{\gamma}_{\beta} \; = \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Portanto, temos que $[I]^{\gamma}_{\beta} \, [I]^{\beta}_{\gamma} \; = \; I$.

Exemplo 2.8.3 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$. *Determine a matriz de mudança da base* $\alpha \; = \; \{ (-3,-1), (-1,3) \}$ *para a base* $\gamma \; = \; \{ (-1,1), (1,1) \}$.

Resposta: $$\boxed{ [I]^{\alpha}_{\gamma} \; = \; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad (\, [I]^{\alpha}_{\gamma} \,)^{-1} \; = \; [I]^{\gamma}_{\alpha} \; = \; \begin{bmatrix} \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{bmatrix} }$$

Exemplo 2.8.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *A matriz de mudança da base* $\gamma = \{ 1 + t, 1 - t^2 \}$ *para uma base* α, *de um mesmo subespaço de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *é dada por*

$$[I]^{\gamma}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine a base α.

Fazendo $\alpha = \{ p_1, p_2 \}$, temos que

$$\begin{aligned} p_1(t) + p_2(t) &= 1 + t \\ 2p_1(t) - p_2(t) &= 1 - t^2 \end{aligned}$$

obtendo a seguinte relação entre os elementos da base α com os elementos da base γ

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{1}{3}(1 + t) + \frac{1}{3}(1 - t^2) \\ p_2(t) &= \frac{2}{3}(1 + t) - \frac{1}{3}(1 - t^2) \end{aligned}$$

De outro modo, sabemos que

$$[I]^{\alpha}_{\gamma} = ([I]^{\gamma}_{\alpha})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a relação entre os elementos da base α com os elementos da base γ.

Exemplo 2.8.5 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Determine a matriz de mudança da base canônica* $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$ *para a base ordenada* $\gamma = \{ 2, 1 - x, 1 - x^2 \}$.

Podemos verificar facilmente que

$$[I]^{\gamma}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos que

$$[I]^{\beta}_{\gamma} = ([I]^{\gamma}_{\beta})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

Exercício 2.68 *Considere a base ordenada* $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *do* $\mathbb{R}^3$ *onde*

$$v_1 = (1, 0, -1) \,, \qquad v_2 = (1, 1, 1) \quad e \quad v_3 = (1, 0, 0) \,.$$

Encontre o vetor de coordenadas do elemento $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *com relação à base ordenada* γ.

Exercício 2.69 *Considere o seguinte subespaço vetorial de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \; / \; x - y - z = 0 \right\} .$$

Considere as seguintes bases do subespaço vetorial U

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad e \qquad \gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

Determine a matriz de mudança de base $[I]^{\gamma}_{\beta}$.

Exercício 2.70 *Seja* V *um espaço vetorial real de dimensão* n. *Sejam*

$$\beta = \{ v_1 \,, \cdots \,, v_n \} \;,\; \alpha = \{ u_1 \,, \cdots \,, u_n \} \quad e \quad \gamma = \{ w_1 \,, \cdots \,, w_n \}$$

três bases ordenadas para V. *Considerando a matriz* $P = [I]^{\beta}_{\alpha}$, *a matriz de mudança da base* β *para a base* α, *e* $Q = [I]^{\alpha}_{\gamma}$, *a matriz de mudança da base* α *para a base* γ. *Determine a matriz de mudança da base* β *para a base* γ, $[I]^{\beta}_{\gamma}$. *Utilizando esse resultado mostre que uma matriz de mudança de base é sempre invertível.*

Exercício 2.71 *Seja* V *um espaço vetorial real e* $\beta = \{ u_1, \cdots, u_n \}$ *uma base para* V. *Mostre que se* $A = [a_{ij}]$ *é uma matriz de ordem* n *invertível, então os elementos*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, u_i \qquad para \qquad j = 1, \cdots, n$$

formam uma base para V *e que* A *é a matriz de mudança da base* $\gamma = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ *para a base* β, *isto é* $A = [I]^{\gamma}_{\beta}$.

Exercício 2.72 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$. *A matriz de mudança da base ordenada* $\gamma = \{ u_1, u_2 \}$, *onde* $u_1 = (1,1)$ *e* $u_2 = (-2,2)$, *para a base ordenada* $\alpha = \{ v_1, v_2 \}$ *é dada por:*

$$[I]_{\alpha}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine a base ordenada α. *Determine o elemento* $u \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $[u]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Exercício 2.73 *Considere as bases* $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ *e* $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$, *relacionadas da seguinte forma:*

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 = 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 = 3u_1 + u_3 \end{cases}$$

Pede–se:

(a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]_{\gamma}^{\beta}$ *e* $[I]_{\beta}^{\gamma}$.

(b) Considere que o elemento $u \in \mathbb{R}^3$ *tem por vetor de coordenadas*

$$[u]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determine o vetor de coordenadas do elemento u *com relação à base* γ.

Exercício 2.74 *Considere a seguinte matriz de mudança de base*

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontre:

(a) $[v]_{\beta}$ *onde* $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $[v]_{\beta'}$ *onde* $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$