Sistemas Lineares

Equações Lineares

Vários problemas nas áreas científica, tecnológica e econômica são modelados por sistemas de equações lineares e requerem a solução destes no menor tempo possível.

Definição. Uma **equação linear** em n incógnitas $x_1, ..., x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, ..., a_n, b$ são constantes reais.

Uma solução para a equação linear acima é um conjunto de números reais $s_1, s_2, ..., s_n$ tais que quando substituímos

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n,$$

a equação é satisfeita.

Exemplo 1. Resolva as seguintes equações lineares:

a) $3x = 5$

Esta equação tem como solução única $x = 5/3$, logo o seu conjunto solução é $S = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

b) $0x = 1$

Esta equação não tem nenhuma solução, pois não existe nenhum número real que multiplicado por 0 dê 1. Portanto

$$S = \emptyset.$$

c) $5x + 10y - 2z = 3$

Isolamos qualquer uma das variáveis, escrevendo ela em função das outras. Por exemplo, isolando x, temos

$$x = \frac{3}{5} - 2y + \frac{2}{5}z,$$

isto é, escrevemos x em função de y e z. As variáveis y e z não dependem de nenhuma outra; elas são **variáveis livres**. Logo, elas podem assumir quaisquer valores reais arbitrários, digamos

$$y = \alpha \text{ e } z = \beta.$$

Portanto, o conjunto solução deste sistema é infinito e tem a forma

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - 2\alpha + \frac{2}{5}\beta, \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ou seja, toda solução da equação tem esta forma, para algum valor de α e algum valor de β. Por exemplo,

$$\begin{array}{lcl} x = \frac{3}{5}, & & x = -\frac{9}{5}, \\ y = 0, & \text{e} & y = 1, \\ z = 0, & & z = -1, \end{array}$$

são soluções da equação: a primeira corresponde a tomar $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, enquanto que a segunda corresponde a tomar $\alpha = 1$ e $\beta = -1$.

Sistemas de Equações Lineares

Um sistema de equações lineares é simplesmente um conjunto de equações lineares.

Definição. Um **sistema de** m **equações lineares** em n variáveis (ou incógnitas) é um conjunto de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 ... + a_{mn}x_n = b \end{cases}$$

onde a_{ij}, b_k para $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$ e $k = 1, ..., m$, são constantes reais, chamados os **coeficientes do sistema**.

Usando a notação de matrizes e, especialmente, a maneira como o produto de matrizes foi definido, o sistema linear acima pode ser representado pela equação matricial

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A matriz A é chamada a **matriz** do sistema.

Definição. Uma **solução** do sistema linear $AX = B$ é uma matriz coluna de números reais

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

tal que todas as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n.$$

Ou seja, S satisfaz

$$AS = B.$$

O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado o **conjunto solução** do sistema.

Exemplo 2. O sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 4x_2 = 180 \\ 4x_1 + 2x_2 = 120 \end{array} \right. .$$

é representado pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

Este sistema possui uma única solução

$$X = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{aligned} x_1 &= 20, \\ x_2 &= 20. \end{aligned}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Operações Elementares

Um método para resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja muito mais fácil de resolver. O novo sistema é obtido após a aplicação de uma série de operações que simplificam as equações do sistema que têm a propriedade especial de não alterar o conjunto solução. Estas operações são chamadas **operações elementares** e são de três tipos diferentes.

Definição. Operações Elementares:

1. Trocar duas equações do sistema de posição.

2. Substituir uma equação pela mesma equação multiplicada por um escalar diferente de 0.

3. Substituir uma equação pela mesma equação somada a outra equação multiplicada por um escalar.

Note que se multiplicarmos uma equação por 0, estaremos excluindo esta equação do sistema, o que tem o efeito provável de aumentar o conjunto solução (pense em um sistema linear como um conjunto de restrições: uma solução do sistema tem que satisfazer todas as equações, isto é, todas as restrições; se uma restrição é eliminada, há mais chances que um conjunto de números que não era solução anteriormente passe a ser solução para o sistema de equações restantes); por isso, esta não é uma operação elementar. É fácil ver que ao efetuarmos qualquer uma das operações acima sobre as equações do sistema, não estaremos acrescentando nem diminuindo soluções.

Note que somente os coeficientes do sistema são alterados através das operações elementares; as variáveis permanecem inalteradas. Portanto, na hora de efetuar os cálculos, ao invés de considerar todo o sistema, podemos considerar apenas a matriz de coeficientes do sistema, chamada **matriz aumentada**:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

As operações elementares serão efetuadas sobre as linhas desta matriz.

Definição. Operações Elementares sobre as linhas de uma matriz:

1. Trocar duas linhas da matriz de posição.

2. Substituir uma linha da matriz pela mesma linha multiplicada por um escalar diferente de 0.

3. Substituir uma linha da matriz pela mesma linha somada a um múltiplo escalar de outra linha.

Teorema. *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$ são tais que a matriz aumentada $[C|D]$ é obtida de $[A|B]$ aplicando-se operações elementares, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

Sistemas que possuem as mesmas soluções são chamados **sistemas equivalentes**.

Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan é um método de escalonamento que consiste em aplicar operações elementares à matriz aumentada de um sistema, até que ela esteja na **forma escalonada reduzida**. A vantagem deste processo é que um sistema cuja matriz aumentada é uma matriz na forma escalonada reduzida tem solução imediata, enquanto que para resolver um sistema que está apenas na **forma escalonada** ainda é necessário fazer uma série de substituições para obter a solução final.

Definição. Uma matriz está na **forma escalonada reduzida** quando ela satisfaz as seguintes condições:

1. O primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula (chamado o **pivô** da linha) é igual a 1.

2. O pivô da linha $i + 1$ ocorre à direita do pivô da linha i.

3. Se uma coluna contém um pivô, então todas os outros elementos desta coluna são iguais a 0.

4. Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não-nulas.

Exemplo 3. As matrizes abaixo estão na forma escalonada reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \pi \end{bmatrix}.$$

A solução de cada um destes sistemas é imediata: no primeiro sistema, x_2 é uma variável livre, enquanto que no segundo x_1 e x_4 são ambas variáveis livres; os dois sistemas têm portanto infinitas soluções. O terceiro sistema não tem solução e o quarto sistema tem solução única.

Já a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

está apenas na forma escalonada, não na forma escalonada reduzida.

O uso de operações elementares para transformar a matriz aumentada de um sistema na forma escalonada reduzida é ilustrado nos próximos exemplos.

Exemplo 4. Resolva o sistema linear seguinte pelo método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 5x + 5y = 15 \\ 2x + 4y + z = 10 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

Solução: A matriz aumentada deste sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

Passo 1: *Encontrar o pivô da 1ª linha.*

$$\frac{1}{5} \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \to 1^{\text{a}} \text{ linha} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

Passo 2: *Zerar os outros elementos da 1ª coluna.*

$$\begin{array}{l} 2^{\text{a}} \text{ linha } + (-2) \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \to 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ 3^{\text{a}} \text{ linha } + (-3) \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \to 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Passo 3: *Encontrar o pivô da 2ª linha.*

$$2^{\text{a}} \text{ linha} \leftrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Passo 4: *Zerar os outros elementos da 2ª coluna.*

$$\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ linha } + (-1) \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \to 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ 3^{\text{a}} \text{ linha } + (-2) \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \to 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Logo, este sistema admite uma única solução, que é

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 5. Resolva o sistema linear seguinte pelo método de Gauss-Jordan.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3z - 9w &=& 6 \\ 5x + 15y - 10z + 40w &=& -45 \\ 4x + 12y - 2z + 14w &=& -24 \\ x + 3y - z + 5w &=& -7 \end{array} \right.$$

Solução: A matriz aumentada deste sistema é

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 4 & 12 & -2 & 14 & -24 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right].$$

Ela pode ser simplificada em um primeiro estágio através de operações elementares antes de procurarmos os pivôs:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \to 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ \frac{1}{5} \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \to 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ \frac{1}{2} \times 3^{\text{a}} \text{ linha} \to 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 2 & 6 & -1 & 7 & -12 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

Passo 1: *Encontrar o pivô da 1ª linha.*

$$1^{\text{a}} \text{ linha} \leftrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 7 & -12 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

Passo 2: *Zerar os outros elementos da 1ª coluna.*

$$\begin{array}{r} 3^{\text{a}} \text{ linha } + (-2) \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \\ 4^{\text{a}} \text{ linha } + (-1) \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 4^{\text{a}} \text{ linha} \end{array} \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

Passo 3: *Encontrar o pivô da 2ª linha.*

$$\text{Não é necessário fazer nada } \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

Passo 4: *Zerar os outros elementos da 2ª coluna.*

$$\begin{array}{r} 1^{\text{a}} \text{ linha } + 2 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ 3^{\text{a}} \text{ linha } + (-3) \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \\ 4^{\text{a}} \text{ linha } + (-1) \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 4^{\text{a}} \text{ linha} \end{array} \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema original é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 3y + 2z & = & -5 \\ z - 3w & = & 2 \end{array} \right. .$$

As variáveis que não estão associadas a algum pivô podem ser tomadas como variáveis livres, isto é, podem assumir valores arbitrários. As variáveis associadas aos pivôs terão seus valores dependentes dos valores das variáveis livres:

$$\begin{aligned} x &= -5 - 3y - 2z, \\ z &= 2 + 3w. \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} y &= \alpha, \\ w &= \beta, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} x &= -5 - 3\alpha - 2\beta, \\ z &= 2 + 3\beta. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução deste sistema é

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} -5 - 3\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ 2 + 3\beta \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemplo 6. Resolva o sistema linear seguinte pelo método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + 3y + 13z &= 9 \\ y + 5z &= 2 \\ -2y - 10z &= -8 \end{cases}$$

Solução: A matriz aumentada deste sistema é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 13 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 4 \end{array}\right]$$

Os pivôs da 1ª e 2ª linhas já são 1, os outros elementos da 1ª coluna já são nulos, logo começamos zerando os outros elementos da segunda coluna:

$$\begin{array}{r} 1^{\text{a}} \text{ linha } + (-3) \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \to 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ 3^{\text{a}} \text{ linha } + 2 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \to 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array} \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A matriz já se encontra agora na forma escalonada reduzida. A última linha dela corresponde à equação

$$1 = 0,$$

que é impossível, logo o sistema não tem solução.

Conforme veremos em breve, estes exemplos tipificam as únicas situações que podem ocorrer em se tratando do conjunto solução de um sistema linear: ou ele possui uma única solução, ou infinitas soluções, ou nenhuma solução.

Número de Soluções de um Sistema Linear

Existem apenas três possibilidades para um sistema linear dado: ou ele não tem solução, ou ele tem uma única solução, ou ele tem infinitas soluções. A prova deste fato está contida no resultado seguinte.

Proposição. *Se um sistema linear possui duas soluções distintas, então ele possui infinitas soluções.*

Prova: Seja $AX = B$ um sistema linear e suponha que X_1, X_2 são duas soluções distintas para este sistema. Afirmamos que

$$X_\lambda = (1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2$$

também será uma solução para este sistema para qualquer valor real de λ. De fato,

$$\begin{aligned} AX_\lambda &= A[(1-\lambda)X_1 + \lambda X_2] \\ &= A[(1-\lambda)X_1] + A[\lambda X_2] \\ &= (1-\lambda)AX_1 + \lambda AX_2 \\ &= (1-\lambda)B + \lambda B \\ &= B. \end{aligned}$$

■

Sistemas Lineares Homogêneos

Definição. Um sistema linear da forma

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 ... + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

ou seja,

$$AX = 0,$$

é chamado um **sistema linear homogêneo**.

Um sistema linear homogêneo sempre tem solução, pois todo sistema homogêneo admite pelo menos a **solução nula** (também chamada **solução trivial**):

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

Em particular, segue da proposição anterior que se um sistema homogêneo possui uma solução não nula, então ele necessariamente possui infinitas soluções.

Exemplo 1. O sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \\ 2x + y - 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

possui uma única solução, a solução nula $x = y = z = 0$. De fato,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2. O sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z + w & = & 0 \\ x + w & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \end{array}\right.$$

possui infinitas soluções. Com efeito,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A última matriz é a matriz aumentada do sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + w & = & 0 \\ y - w & = & 0 \\ z + w & = & 0 \end{array}\right. ,$$

donde

$$x = -w,$$
$$y = w,$$
$$z = -w.$$

As variáveis x, y, z, correspondentes aos pivôs, são dependentes do valor de w, mas este é independente e pode assumir qualquer valor arbitrário, digamos, $w = \alpha$. Logo o conjunto-solução deste sistema homogêneo é o conjunto infinito

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Se o número de incógnitas de um sistema homogêneo é maior que o número de equações, então o sistema necessariamente possui infinitas soluções, como o próximo exemplo ilustra, e como provamos a seguir:

Exemplo 3. Suponha que após aplicarmos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada de um sistema linear homogêneo de 6 equações e 9 incógnitas tenhamos chegado na matriz escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta é a matriz aumentada do sistema linear homogêneo equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - 3x_4 + 4x_5 + 2x_7 & = & 0 \\ x_3 + 2x_4 + 7x_5 & = & 0 \\ x_6 - x_7 & = & 0 \\ x_8 & = & 0 \\ x_9 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Temos 5 pivôs e 4 variáveis livres:

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 3x_4 - 4x_5 - 2x_7, \\ x_3 & = & -2x_4 - 7x_5, \\ x_6 & = & x_7, \\ x_8 & = & 0, \\ x_9 & = & 0, \end{array} .$$

A estas quatro variáveis livres podem ser atribuídos valores arbitrários,

$$x_1 = \alpha,$$
$$x_4 = \beta,$$
$$x_5 = \gamma,$$
$$x_7 = \delta.$$

Portanto, as infinitas soluções do sistema são da forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 3\beta - 4\gamma - 2\delta \\ -2\beta - 7\gamma \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição. *Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma matriz com mais colunas que linhas, isto é, m¡n, então o sistema homogêneo $AX = 0$ possui infinitas soluções.*

Prova: Após aplicar as operações elementares à matriz aumentada $[A|0]$, o número de linhas não-nulas da matriz escalonada reduzida obtida é $r \leq m$. Como m¡n, segue que teremos r pivôs e $n - r > 0$ variáveis livres. ■

Como uma observação final, notamos que se X_1, X_2 são duas soluções de um sistema linear homogêneo $AX = 0$, então qualquer combinação linear destas soluções, isto é, qualquer matriz da forma

$$\alpha X + \beta Y$$

para quaisquer números reais α, β, também é uma solução para o sistema. De fato,

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = A(\alpha X_1) + A(\beta X_2) = \alpha(AX_1) + \beta(AX_2) = 0 + 0 = 0.$$

Isso só vale para sistemas lineares homogêneos. Se X_1, X_2 são duas soluções de um sistema linear $AX = B$, com $B \neq 0$, então em geral $\alpha X_1 + \beta X_2$ não é uma solução de $AX = B$, pois

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = A(\alpha X_1) + A(\beta X_2) = \alpha(AX_1) + \beta(AX_2) = \alpha B + \beta B = (\alpha + \beta)B \neq B,$$

a não ser que $\alpha + \beta = 1$. Ou seja, apenas as combinações lineares da forma

$$\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$$

são soluções de $AX = B$.

Geometricamente, como veremos mais adiante no curso, isso se explica pelo fato de que as soluções de um sistema homogêneo formam um subespaço vetorial, logo contém o plano gerado por X_1 e X_2, enquanto que as soluções de um sistema não homogêneo formam apenas um subespaço afim (um plano k-dimensional que não passa pela origem), logo contém apenas a reta que passa pelos pontos X_1 e X_2.