

FACULDADE

Engenharia _____

Disciplina: Álgebra Linear

Professor(a): _____ Data ____ / ____ / ____

Aluno(a): _____ Turma _____

3^a. Lista de Exercícios

Transformações Lineares. Autovalores e autovetores.

Dentre as aplicações, as mais importantes são as **aplicações lineares**. Uma boa parte da Matemática é dedicada à redução de questões relativas a aplicações arbitrárias para questões que envolvam aplicações lineares. De qualquer forma, as aplicações são interessantes em si mesmas e muitas delas são lineares. Por outro lado, freqüentemente é possível aproximar uma aplicação arbitrária por uma linear, cujo estudo é mais simples do que o estudo da aplicação original. (*Serge Lang*)

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Questão 1. Verifique quais das seguintes aplicações são lineares:

- a) $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x, y)$.
- b) $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $T(x, y) = x \cdot y$.
- c) $T : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $T(x) = |x|$.
- d) $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x, 3y - z)$.
- e) $T : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $T(x) = \text{sen}(x)$.
- f) $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x, y)$

Questão 2. Determine a transformação linear para cada uma das aplicações abaixo:

- a) $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ e $T(0, 1) = (2, 1, -4)$.
- b) $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
- c) $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ tal que $T(1, 2, 1) = (1, 2, 3)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 5)$ e $T(0, 4, 1) = (0, 3, 2)$.
- d) $S : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1)$, $S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$

Questão 3. a) Qual a transformação linear $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?

b) Determine $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$, usando o item (a).

Questão 4. Determinar a dimensão do núcleo e da imagem e suas respectivas bases da aplicação linear T do:

a) Exercício 1, itens (a), (d) e (f).

b) Exercício 2, item (b).

Questão 5. Sendo $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, 3x + z)$, determine uma base para $N(T)$ e $Im(T)$.

Questão 6.

Determinar uma transformação linear:

- a) $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ cuja imagem seja gerada por $\{(1,2,3), (4,5,6)\}$.
- b) $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que $N(T) = [(1,0,0), (0,2,0)]$ e $Im(T) = [(2,4)]$. Considere $\beta = \{(1,0,0), (0,2,0), (0,0,1)\}$ base do \mathfrak{R}^3 .
- c) $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ tal que $Im(T) = [(1,1,2), (2,1,0)]$.

Questão 7.

Verifique se as transformações abaixo são injetoras.

- a) $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, tal que $T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$.
- b) $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$.

Questão 8.

Seja $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ operador linear dado por $T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$. Quais dos seguintes vetores estão em $Im(T)$?

- a) $(1, -4)$ b) $(5, 0)$ c) $(-3, 12)$

Questão 9.

Seja $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ operador linear dado por $T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$. Quais dos seguintes vetores estão em $N(T)$?

- a) $(5, 10)$ b) $(3, 2)$ c) $(1, 1)$

Questão 10.

Determinar a transformação linear $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ tal que $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3; z = x - y\}$ e $T(0,0,1) = (0,0,0,1)$.

Questão 11.

Considere a transformação linear $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as bases $A = \{(1,0,0), (2,-1,0), (0,1,1)\}$ do \mathfrak{R}^3 e $B = \{(-1,1), (0,1)\}$ do \mathfrak{R}^2 . Determine a matriz $[T]_B^A$.

Questão 12.

Considere a transformação linear $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, $T(x, y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$ e as bases $A = \{(-1,1), (2,1)\}$ e $B = \{(0,0,1), (0,1,-1), (1,1,0)\}$. Determine $[T]_B^A$. Qual a matriz $[T]_C^A$, onde C é a base canônica do \mathfrak{R}^3 ?

Questão 13. Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ nas bases $A = \{(-1,1), (1,0)\}$ do \mathfrak{R}^2 e $B = \{(1,1,-1), (2,1,0), (3,0,1)\}$ do \mathfrak{R}^3 é

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

encontre a expressão de $T(x, y)$ e a matriz $[T]$.

Questão 14. Seja $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz canônica de uma transformação linear $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$. Se $T(v) = (2, 4, -2)$, determine v .

Questão 15. Seja $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ o operador linear dado pela matriz $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

- Calcule $N(T)$ e $\dim N(T)$.
- Calcule $Im(T)$ e $\dim Im(T)$.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Questão 1. Verificar, utilizando a definição, se os vetores dados são *autovetores* dos operadores lineares:

a) $v = (-2, 1)$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $v = (-2, 1, 3)$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Questão 2. Determine os *autovalores* e os *autovetores* dos seguintes operadores lineares:

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$;

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$;

c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (5x - y, x + 3y)$;

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (y, -x)$;

e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

Questão 3. Os vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (2, -1)$ são *autovetores* de um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determinar a imagem do vetor $v = (4, 1)$ por esse operador.

Questão 4. a) Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujos *autovalores* são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos *autovetores* $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (0, 1)$, respectivamente.

b) Mesmo enunciado para $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ e $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-1, 0)$.

Questão 5. Se $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$, são *autovalores* de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, associados aos *autovetores* $u = (2, 1)$ e $v = (-1, 3)$, respectivamente, determine $T(3u - v)$.

Questão 6. Considere um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(u) = u$ e $T(v) = \frac{1}{2}v$ para algum vetor u (e v) $\in \mathbb{R}^2$. Determine $T(w)$ se $u = (0, 2)$, $v = (2, 6)$ e $w = (3, 7)$.

Respostas

Transformações Lineares

Q1.. São lineares as aplicações dos itens (a),(d) e (f).

- Q2..** a) $T(x,y) = (-x+2y, -3x+y, 13x-4y)$.
 b) $T(x,y,z) = (2x+y, y-z)$.
 c) $T(x,y,z) = (5x+2y-8z, x+y-z, 11x+5y-18z)$.
 d) $S(x,y,z) = (x/3, (5x-6y)/3)$.

- Q3.** a) $T(x,y) = (3x, (5x-y)/2, x)$.
 b) $T(1,0) = (3, 5/2, 1)$ e $T(0,1) = (0, -1/2, 0)$.

- Q4..** a) 1.a) $\beta_{N(T)} = \{(0,0,1)\}$ e $\beta_{Im(T)} = \{(1,0),(0,1)\}$.
 1.d) $\beta_{N(T)} = \{(0,1,3)\}$ e $\beta_{Im(T)} = \{(1,0),(0,1)\}$.
 1.f) $\beta_{Im(T)} = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.
 b) 2.b) $\beta_{N(T)} = \{(-1,2,2)\}$ e $\beta_{Im(T)} = \{(1,0),(0,1)\}$.

- Q5.** a) $\beta_{N(T)} = \{(-1,1,3)\}$.
 b) $\beta_{Im(T)} = \{(1,2,3),(1,-1,0)\}$.

- Q6.** a) $T(x,y) = (x+4y, 2x+5y, 3x+6y)$.
 b) $T(x,y,z) = (2z, 4z)$.
 c) $T(x,y,z) = (x+2y, x+y, 2x)$.

- Q7** a) $N(T)=[(1,1)]$, T não é injetora.
 b) $N(T)=[(0,1,-1)]$, T não é injetora.

Q8. (a) e (c).

Q9. (a).

Q10. $T(x,y,z) = (0, 0, 0, z-x+y)$.

Q11 $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Q12 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

Q13 $T(x,y) = (8x+18y, 6x+11y, -2x-4y)$ e $[T] = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

Q14 $v = (2,0)$.

Q15 a) $N(T) = \{(2z, -3z, -4z); z \in \mathfrak{R}\}$, $\dim N(T) = 1$

b) $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3; x-y+z=0\}$, $\dim Im(T) = 2$

Autovalores e autovetores

Q1.. a) Sim. b) Não.

- Q2..** a) $\lambda_1 = 3, v_1 = (y, y); \lambda_2 = 2, v_2 = (2y, y)$
 b) $\lambda_1 = 1, v_1 = (-2y, y); \lambda_2 = 4, v_2 = (y, y)$
 c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, v = (x, x)$
 d) Não existem.
 e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, v = (x, y, -y); \lambda_3 = 4, v_3 = (x, x, 2x)$

Q3. (8,11)

- Q4..** a) $T(x, y) = (x, 2x + 3y)$.
 b) $T(x, y) = \left(-2x + \frac{5}{2}y, 3y\right)$.

Q5. (26,6).

Q6. $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$