FACULDADE
Engenharia: ______________________________
Disciplina: Álgebra Linear
Professor(a): ______________________________ Data _____ / _____ / _____
Aluno(a): ____ Turma______

2ª. Lista de Exercícios

Espaço Vetorial

A álgebra de vetores e a álgebra de matrizes são similares em muitos aspectos. Em particular, podemos fazer a adição de vetores e de matrizes, e podemos multiplicar ambos por um escalar. As propriedades resultantes dessas duas operações são idênticas nos dois ambientes, revelando-nos uma "estrutura" comum desses conjuntos em relação a essas operações. Esse fato não só vale para esses dois conjuntos com essas operações, mas para muitos outros.

Sendo assim, o estudo dos **espaços vetoriais** mostra-se muito importante, visto que possibilita conhecer de forma geral todos esses conjuntos que apresentam essa mesma estrutura.

Questão1. Dados os espaços vetoriais V abaixo verifique, em cada caso, se W é subespaço vetorial de V sobre $\mathbb{R}$.

a) $V = \mathbb{R}^2$.

a.1) $W = \{(x,y) \in V,\ y = 3x\}$.

a.2) $W = \{(x,y) \in V,\ y = -2x+1\}$.

a.3) $W = \{(x,y) \in V,\ y = |x|\}$.

a.4) $W = \{(x,y) \in V,\ y = x^2\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$.

b.1) $W = \{(x,y,z) \in V,\ x+y+z = 1\}$.

b.2) $W = \{(x,y,z) \in V,\ x = 2y+z\}$.

b.3) $W = \{(x,y,z) \in V,\ xz = 0\}$.

b.4) $W = \{(x,y,z) \in V,\ y \le 0\}$

c) $V = M_2(\mathbb{R})$.

c.1) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V,\ x + \mathrm{w} = 0\right\}$.

c.2) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V,\ z = xw\right\}$.

c.3) $W = \{A \in V;\ A = A^t\}$

c.4) $W = \{A \in V;\ A = A^2\}$

Questão2. Escreva, **se possível**, cada vetor v como **combinação linear** dos elementos do conjunto S, sendo:

a) $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $S = \left\{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}\right\}$.

b) $v = (2,7)$ e $S = \{(1,0), (2,9)\}$.

c) $v = (0,0,3)$ e $S = \{(2,0,0), (0,1,0)\}$.

d) $v = (4,5,-1)$ e $S = \{(1,1,1), (1,2,0), (2,3,-1)\}$.

e) $v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Questão3. Considere os vetores $v = (1,2,1), w = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$.

a) Escreva uma combinação linear de v e w.
b) Determine o conjunto de todas as combinações lineares de v e w, ou seja, o subespaço gerado por v e w.
c) Verifique se o vetor $u = (-1,0,1) \in [v,w]$.

Questão4. Considere os vetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Escreva $u = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3. Esta combinação linear é única?

b) Escreva u como combinação linear de v_1 e v_2. Esta combinação linear é única?

c) Verifique se $w = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pode ser escrito como uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

Questão5. Determine um conjunto de **geradores** para os seguintes subespaços:

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+z=0 \text{ e } x-2y=0\}$. b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y-3z=0\}$.

c) $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ a\text{+c=0 e } d=0\right\}$. d) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ x+\text{y}=z \text{ e } w\text{-2y}=0\right\}$.

Questão6. Determine *k* de modo que o conjunto $\{(1,0,k),\ (1,1,k),\ (1,k,k^2)\} \subset \mathbb{R}^3$ seja *L.I.* .

Questão7. Verifique se os conjuntos abaixo são *L.I.* ou *L.D.*:

a) $\{(1,-1,3),(5,2,4),(4,1,7)\}$. b) $\{(1,2,-3,1),(2,3,-7,1),(1,4,1,5),(0,3,5,5)\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ d) $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}\right\}$

Questão8. Verifique quais dos seguintes conjuntos abaixo:

i) são *L.I.* **ii)** geram os espaços *V* considerados. **iii)** são bases dos espaços *V* considerados.

a) $\{(1,1,-1),\ (2,2,1),\ (1,1,1)\} \subset \text{V} = \mathbb{R}^3$. b) $\{(-1,1),\ (1,1),\ (1,2)\} \subset \text{V} = \mathbb{R}^2$.

c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right\} \subset \text{V} = M_2(\mathbb{R})$.

d) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \text{V} = M_{2\text{x}3}(\mathbb{R})$.

Questão9. Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços vetoriais:

a) $W = [(1,0,0),(0,5,-2),(-1,0,2),(0,5,0)]$. b) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 14 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

c) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\Re),\ z-y=0\right\}$.

Questão10. Encontre as equações lineares homogêneas que caracterizam os seguintes subespaços:

a) $W = [(-2,1,0),\ (3,0,1),\ (-1,2,1)]$ em $\mathbb{R}^3$.

b) $W = [(2,1,-2),\ (4,-2,-4)]$ em $\mathbb{R}^3$.

c) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right]$ em $M_2(\mathbb{R})$.

d) $W = [(2,-2),\ (-1,1)]$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão11. Nos casos abaixo, determine as equações lineares homogêneas que caracterizam $U \cap W$ e uma base para $U \cap W$.

a) $\begin{cases} U = [(2,-2,0),(0,0,3)] \\ W = [(4,0,-4),(0,5,0)] \end{cases}$

b) $\begin{cases} U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\} \\ W = [(0,2,0),\ (1,2,3),\ (7,12,21),\ (-1,-2,-3)] \end{cases}$

c) $\begin{cases} U = [(1,0,2),(0,1,1),(1,1,3)] \\ W = [(0,-1,1),(0,1,-1/2)] \end{cases}$

d) $\begin{cases} U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \end{cases}$

Questão12. Sejam os vetores $u = (2,-1,4)$, $v = (1,1,2)$ e $t = (4,-5,8)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Encontre uma base para $S = [u,\ v,\ t]$;

b) Escreva as equações que caracterizam *S*;

c) O vetor (1,0,-2) pertence a *S* ?

d) Seja $Y = [(0,7,0)]$. Determine $Y \cap S$.

Questão13. Diga quais dos seguintes vetores abaixo pertencem a $W = [(2, 1, 0, 3), (3, -1, 5, 2), (-1, 0, 2, 1)]$.

a) $(2, 3, -7, 3)$

b) $(0, 0, 0, 0)$

c) $(1, 1, 1, 1)$.

Questão14. Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo.

a) Dois vetores são L.D. se, e somente se, um deles é múltiplo do outro. ( )

b) Um conjunto que contém um subconjunto de vetores L.D. é L.D. ( )

c) Um subconjunto de um conjunto L.I. pode ser L.D. ( )

d) Se $w_1 \in [w_2, w_3]$, então $\{w_1, w_2, w_3\}$ é L.D. ( )

e) Se $[w_1, w_2] = [w_1, w_2, w_3]$, então $\{w_1, w_2, w_3\}$ é L.D. ( )

f) Se $\{w_1, w_2, w_3\}$ é L.I., então $[w_1, w_2] = [w_1, w_2, w_3]$. ( )

Questão15. Dê, **se possível**, exemplos de conjuntos pedidos abaixo. Caso seja impossível, justifique sua resposta.

a) Um conjunto *L.I.* com 3 vetores de $\mathbb{R}^2$.
b) Um conjunto *L.I.* com 2 vetores que geram o $\mathbb{R}^3$.
c) Um conjunto *L.I.* de $\mathbb{R}^3$ que contenha o conjunto {(1,2,3), (0,0,0)}.
d) Uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vetores {(2,4,-6), (-1,1,-3)}.
e) Um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$ de dimensão 3.
f) Uma base do $\mathbb{R}^3$ que contenha o conjunto $\{(2,2,-2),(-3,-3,3)\}$

Questão16. Considere os seguintes subespaços de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; tais \;\; que \;\; a+d=0 \;\; e \;\; b+c=0 \right\} \text{ e } W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; tais \;\; que \;\; a+c=0 \;\; e \;\; b+d=0 \right\}.$$

Determine:

a) o subespaço $W_1 \cap W_2$;
b) uma base para cada subespaço W_1 , W_2 , $W_1 \cap W_2$;
c) dim($W_1 + W_2$).

Questão17. Sejam U e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$. Sabendo que $U \cap W = [(1,-1,-2,0),(2,1,-1,0),(1,2,1,0)]$, $\dim(U+W)=3$ e $\{(1,2,1,0),(0,1,1,0)\}$ é uma base de U, determine a dimensão de W.

Questão18. Se U e W são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^5$, tais que $W = \{(x,y,z,t,u) \in R^5 ; 2y+4z-6t=0 \;\; e \;\; z=0\}$, $dim(U \cap W)=0$ e $dim(U+W)=5$, determine a dimensão de U.

Respostas

Q1.. a.1) sim a.2) não a.3) não a.4) não
b.1) não b.2) sim b.3) não b.4) não
c.1) sim c.2) não c.3) sim c.4) não

Q2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ b) $(2,7) = \frac{4}{9}(1,0) + \frac{7}{9}(2,9)$

c) não é possível. d) $(4,5,-1) = 1(1,1,1) - 1(1,2,0) + 2(2,3,-1)$ e) não é possível.

Q3. b) $[v_1, v_2] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -3x + y + z = 0\}$ c) sim

Q4. a) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = (10-\alpha)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-7+\alpha)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-7)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) Não é possível.

Q5.. a) $\{(2,1,-2)\}$ b) $\{(-2,1,0),\ (3,0,1)\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

Q6. $k \neq 0$ e $k \neq 1$

Q7. a) L.I. b) L.D. c) L.D. d) L.I.

Q8. a) i) L.D. ii) não. iii) não. c) i) L.D. ii) não. iii) não.
b) i) L.D. ii) sim. iii) não. d) i) L.I. ii) não. iii) não.

Q9. a) $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},\ dim(W) = 3$ b) $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},\ dim(W) = 3$

c) $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},\ dim(W) = 3$

Q10. a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\}$ b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0\}$

c) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ x + y - z = 0 \text{ e } w = 0\right\}$ d) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0\}$

Q11. a) $U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ e } x + z = 0\}$ $B_{U\cap W} = \{(1,-1,-1)\}$

b) $U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=0 \text{ e } z=0\}$ $B_{U\cap W} = \{(0,1,0)\}$

c) $U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0, z = y\}$ $B_{U\cap W} = \{(0,1,1)\}$

d) $U \cap W = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); x - w = 0, y - w = 0, z - w = 0\right\}$ $B_{U\cap W} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Q12. a) $B = \{(1,1,2),(0,1,0)\}$. b) $S = \{(x, y, z) \in \Re^3, \quad 2x - z = 0\}$. c) não. d) $Y \cap S = Y$, pois $Y \subset S$.

Q13. Somente (a) e (b).

Q14. a) V b) V c) F d) V e) V f) F

Q15. a) Impossível, pois $\mathbb{R}^2$ admite, no máximo, dois vetores L.I..
b) Impossível, pois dois vetores L.I. somente geram um plano no $\mathbb{R}^3$.
c) Impossível, pois este conjunto é L.D (possui o vetor nulo).
d) Possível, pois os vetores são L.I.
e) Possível, pois $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.
f) Impossível, pois o conjunto é L.D.

Q16. a) $W_1 \cap W_2 = \left\{\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

b) Uma base de W_1: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, uma base de W_2: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ e uma base de $W_1 \cap W_2$: $\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

c) $\dim(W_1 \cap W_2) = 3$

Q17. $\dim W = 3$

Q18. $\dim U = 2$