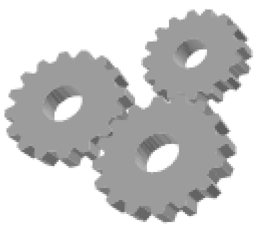
FACULDADE DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cursos de Engenharia

Prof. Álvaro Fernandes Serafim

Apostila Nº 3 de Álgebra Linear



Última atualização: 01/12/2007.

Esta apostila de Álgebra Linear foi elaborada pela Professora ***Ilka Rebouças Freire***. A formatação e a adaptação são do Professor ***Álvaro Fernandes Serafim***.

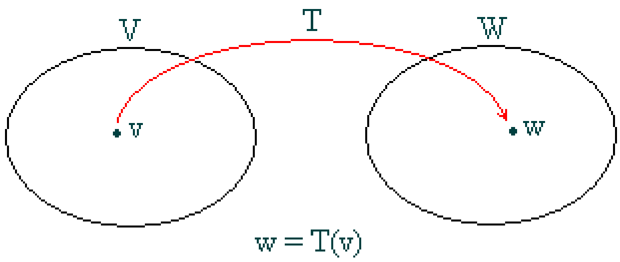
Temas desta apostila:

Transformação linear

Até agora só trabalhamos com funções reais de uma variável real, ou seja, funções cujos domínios e imagens são subconjuntos de R. Por exemplo: $f(x) = 2x + 1$; $f(x) = x^2$; $f(x) = e^x$, etc. Vamos agora tratar de funções que têm como domínio e contradomínio outros espaços vetoriais como R^2, R^3, $M_2(R)$, etc . Assim, tanto a variável independente quanto a variável dependente serão vetores, razão pela qual, funções deste tipo são também chamadas de funções vetoriais.

Vamos estudar uma classe especial de funções definidas entre espaços vetoriais que são aquelas que preservam as operações de adição e a multiplicação por um escalar. Enfatizaremos as transformações lineares de R^n em R^m. Tais transformações têm importância fundamental no estudo da Álgebra Linear e muitas aplicações na Física e nas Engenharias.

Para dizer que T é uma transformação (ou função) de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, escrevemos $T: V \to W$. Sendo T uma função, todo vetor $v \in V$ está associado a um único vetor imagem $w \in W$, tal que $w = T(v)$.



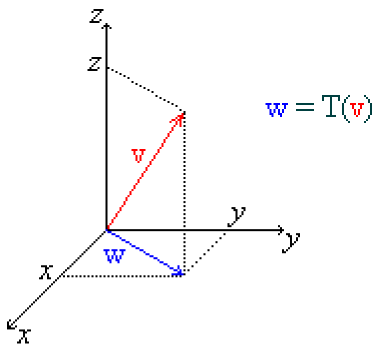
Exemplos:

1) $T: R^2 \to R^3$
$T(x, y) = (x,\ y,\ x + y)$.

Exemplos de algumas imagens: $T(1, 2) = (1, 2, 3)$; $T(0, 1) = (0, 1, 1)$.

2) $T : R^3 \to R^3$
$T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Esta transformação é chamada de projeção ortogonal do R^3 sobre o plano XY, pois ela transforma um vetor qualquer do R^3 na sua projeção sobre o plano XY.



Definição de transformação linear

> Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre R. Uma **transformação linear** T: V $\rightarrow$ W é uma aplicação (função) que satisfaz as seguintes condições:
>
> i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, $\forall u, v \in V$.
>
> ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall u \in V$ e $\forall \lambda \in R$.

Observações:

1) No caso em que V = W uma transformação linear T: V $\rightarrow$ V é também chamada de **operador linear**.

2) A definição nos diz em palavras que se T é uma transformação linear então a imagem da soma é a soma das imagens e a imagem de um vetor multiplicado por um escalar é igual ao escalar multiplicado pela imagem do vetor.

3) As condições i) e ii) da definição são equivalentes a $T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v)$. Isto significa dizer que para verificarmos se uma transformação é linear, podemos verificar apenas esta condição.

Exemplos:

1) A transformação T: R $\rightarrow$ R, tal que $T(x) = 2x$ é linear. De fato:

i) $T(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = T(x) + T(y)$.

ii) $T(\lambda x) = 2(\lambda x) = \lambda(2x) = \lambda T(x)$.

2) A transformação T: R $\rightarrow$ R, tal que $T(x) = \alpha x$, α constante real, é linear. Este caso é uma generalização do anterior.

As transformações acima têm como gráfico uma reta passando pela origem e motivaram a definição de transformação linear. Pode-se mostrar que toda transformação linear de R em R é do tipo descrito acima.

3) A transformação T: $R^2 \rightarrow R$, tal que $T(x, y) = x + y$ é linear. De fato:

i) $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$

$= T((x_1, y_1)) + T((x_2, y_2)).$

ii) $T(\lambda(x_1, y_1)) = T((\lambda x_1, \lambda y_1)) = \lambda x_1 + \lambda y_1 = \lambda(x_1 + y_1) = \lambda T(x_1, y_1).$

4) A transformação T: $R^2 \rightarrow R$, tal que $T(x, y) = x + y + 1$ não é linear. De fato, a condição i) falha:

i) $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \mathbf{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 1} \neq T(x_1, y_1) + T(x_2 + y_2) =$

$= (x_1 + y_1 + 1) + (x_2 + y_2 + 1) = \mathbf{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2}.$

Não é necessário verificar a segunda condição, visto que a primeira condição falhou.

De outra forma, poderíamos mostrar, com um exemplo numérico, que esta transformação não é linear. Por exemplo, $T(1, 1) = 3$ e $T(2, 2) = 5$. Logo, $T(2(1, 1)) \neq 2\,T(1, 1)$, isto é $5 \neq 6$.

5) A transformação T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (x^2, y)$ não é linear. De fato, a condição i) falha:

i) $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \mathbf{((x_1 + x_2)^2 , y_1 + y_2)} \neq T(x_1, y_1) + T(x_2 + y_2) =$

$= (x_1^2 , y_1) + (x_2^2 , y_2) = \mathbf{(x_1^2 + x_2^2 , y_1 + y_2)}$, pois sabemos que $\mathbf{(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2}$.

De outra forma, poderíamos mostrar, com um exemplo numérico, que esta transformação não é linear. Por exemplo, $T(1, 1) = (1, 1)$ e $T(2, 1) = (4, 1)$, mas $T((1, 1) + (2, 1)) = T(3, 2) = \mathbf{(9, 2)} \neq (1, 1) + (4, 1) = \mathbf{(5, 2)}$.

Exercícios: Verifique quais das seguintes aplicações são lineares:

a) T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x, y)$.

b) T: $R^2 \rightarrow R$ definida por $T(x, y) = xy$.

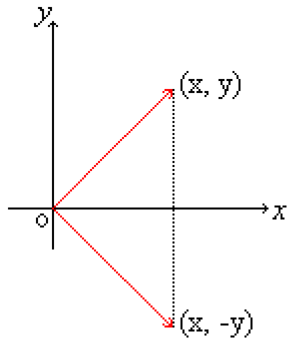
c) T: $R \rightarrow R$ definida por $T(x) = |x|$.

d) T: $M_2(R) \rightarrow R$ definida por $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x + y + z + w$.

Algumas transformações lineares do plano

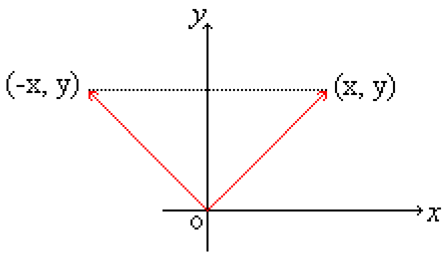
1) Reflexão em relação ao eixo ox.

T: $R^2 \rightarrow R^2$
T(x, y) = (x, -y).



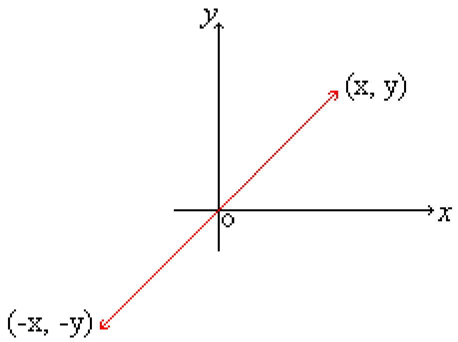
2) Reflexão em relação ao eixo oy.

T: $R^2 \rightarrow R^2$
T(x, y) = (-x, y).



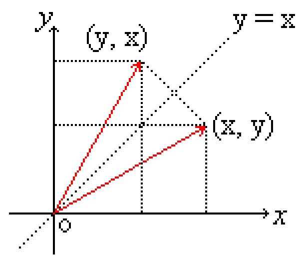
3) Reflexão em relação à origem.

T: $R^2 \rightarrow R^2$
T(x, y) = (-x, -y).



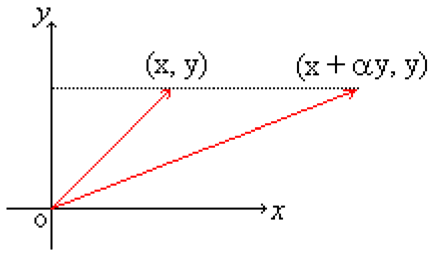
4) Reflexão em relação à 1ª bissetriz (reta y = x).

T: $R^2 \rightarrow R^2$
T(x, y) = (y, x).



5) Cisalhamento horizontal de fator α.

$T: R^2 \to R^2$
$T(x, y) = (x + \alpha y, y)$.



Por exemplo, a transformação $T: R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = (x + 3y, y)$ é uma transformação de cisalhamento de fator 3. Pode ser mostrado que, se T for aplicado sobre cada ponto do quadrado 2x2 mostrado na figura 1, então o conjunto das imagens forma o paralelogramo sombreado na figura 2. A idéia chave é mostrar que T transforma segmentos de reta em segmentos de reta e, depois, verificar que os vértices do quadrado são transformados nos vértices do paralelogramo. Por exemplo, a imagem do ponto $u = (0, 2)$ é $T(u) = (6, 2)$ e a imagem de $v = (2, 2)$ é $T(v) = (8, 2)$. A transformação T deforma o quadrado transladando-se a base superior para a direita e mantendo a inferior fixa. Transformações de cisalhamento aparecem na Física, na Computação Gráfica, na Geologia, na Cristalografia, etc.

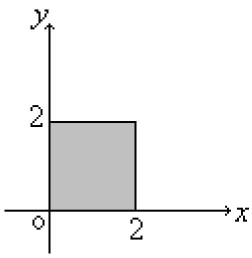


Figura 1.

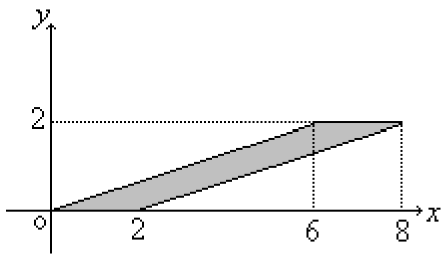
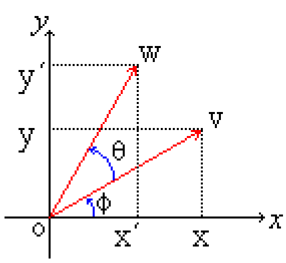


Figura 2.

6) A Rotação de um ângulo θ.

A operação que gira cada vetor do R^2 por um ângulo fixado θ é chamada de uma rotação do R^2 de um ângulo θ. Vamos supor que o operador T_θ gira o vetor $v = (x, y)$ no sentido anti-horário por um ângulo positivo θ, obtendo o vetor $w = T_\theta(v) = (x', y')$.

Seja ϕ o ângulo formado pelo vetor v com o eixo ox e r o módulo dos vetores v e w.



$$w = T_\theta(v) = (x', y')$$

Da trigonometria básica, temos que:

$x = r\cos(\phi)$ e $y = r\,\text{sen}(\phi)$.

$x' = r\cos(\theta + \phi)$ e $y' = r\,\text{sen}(\theta + \phi)$.

Desenvolvendo x' e y', usando o cosseno e o seno da soma, obtemos:

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y' = x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}.$$

E, portanto, $T_\theta(x, y) = (\, x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta),\ \ x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta)\,)$.

Exemplos

a) $T_{90^\circ}(x, y) = (\, x\cos(90^\circ) - y\,\mathrm{sen}(90^\circ),\ \ x\,\mathrm{sen}(90^\circ) + y\cos(90^\circ)\,) = (-y, x)$.

Por exemplo, $T_{90^\circ}(1, 0) = (0, 1)$.

b) $T_{45^\circ}(x, y) = (x\cos(45^\circ) - y\,\mathrm{sen}(45^\circ),\ \ x\,\mathrm{sen}(45^\circ) + y\cos(45^\circ)\,) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)\right)$.

Por exemplo, $T_{45^\circ}(1, 1) = (\, 0, \sqrt{2}\,)$.

Propriedades das transformações lineares

Propriedade 1: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então $T(0) = 0$, isto é, o vetor nulo de V é sempre transformado no vetor nulo de W.

De fato, $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = 2.T(0) \Rightarrow T(0) = 0$.

Temos como conseqüência: se $T(0) \neq 0$, então T não é uma transformação linear.

Exemplo: A transformação $T: R^2 \to R$, tal que $T(x, y) = x + y + 1$, **não é** linear, pois $T(0, 0) \neq 0$.

Observação: O fato de $T(0) = 0$ não garante que T seja uma transformação linear. Por exemplo, a transformação $T: R \to R^2$; $T(x) = (x^2, x)$, é tal que $T(0) = (0, 0)$ mas T **não é** linear.

De fato, $T(1) = (1, 1)$; $T(2) = (4, 2)$ e $\mathbf{T(1{+}2)} = T(3) = (9, 3) \neq \mathbf{T(1) + T(2)}$.

Propriedade 2: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então $T(-u) = -T(u)$.

De fato, $T(-u) = T(-1.u) = (-1).T(u) = -T(u)$.

Propriedade 3: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então $T(u - v) = T(u) - T(v)$.

De fato, $T(u - v) = T(u + (-1)v) = T(u) + (-1).T(v) = T(u) - T(v)$.

Exemplos:

1) Sabendo que $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear tal que $T(u) = w_1$ e $T(v) = w_2$, calcule $T(3u - 5v)$.

Solução: $T(3u - 5v) = T(3u) - T(5v) = 3T(u) - 5T(v) = 3w_1 - 5w_2$.

2) Se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ e T é uma transformação linear, então:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n).$$

Este resultado é uma generalização do exemplo anterior.

3) Sabendo que $T: R^2 \rightarrow R$ é uma transformação linear e que $T(1, 2) = 4$ e $T(1, 4) = -3$, determine $T(2, 6)$ e $T(50, 100)$.

Como $(2, 6) = (1, 2) + (1, 4)$, então $T(2, 6) = T(\,(1, 2) + (1, 4)\,) = T(1, 2) + T(1, 4) = 4 - 3 = 1$.

Como $(50, 100) = 50(1, 2)$, então $T(50, 100) = T(\,50(1, 2)\,) = 50.T(1, 2) = 50.4 = 200$.

*****

Um resultado importante sobre as transformações lineares é que elas ficam completamente determinadas se conhecemos as imagens dos vetores de uma base qualquer do domínio.

> Sejam V e W espaços vetoriais $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base de V e $w_1, w_2, ...w_n$ vetores arbitrários de W. Então, existe uma **única** transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.

Para determinar a lei da transformação linear, encontramos as coordenadas de um vetor v genérico do domínio e aplicamos a definição de transformação linear, isto é;

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n.$$

Desta forma,

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n.$$

$$\boxed{T(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n.}$$

Exemplos: Determine as transformações lineares a seguir.

1) T: $R^2 \to R^3$, tal que T(1, 0) = (1, 2, 3) e T(0, 1) = (– 1, 0, 1).

Solução:

β = {(1, 0), (0, 1)} é uma base (canônica) do R^2 e conhecemos as imagens dos vetores desta base.

$$[(x, y)]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = x \quad e \quad \alpha_2 = y. \text{ Então:}$$

$$T(x, y) = T(\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)) = \alpha_1 T(1, 0) + \alpha_2 T(0, 1) = x(1, 2, 3) + y(-1, 0, 1) = (x - y,\ 2x,\ 3x + y).$$

Logo, $T(x, y) = (x - y,\ 2x,\ 3x + y)$.

Observe que esta lei satisfaz as condições do problema: T(1, 0) = (1, 2, 3) e T(0,1) = (– 1, 0, 1).

2) T: $R^2 \to R^2$, tal que T(1, 1) = (1, 0) e T(–1, 1) = (1, 2).

Solução:

β = {(1, 1), (–1, 1)} é uma base do R^2. Vamos, inicialmente, encontrar as coordenadas de um vetor genérico v = (x, y) em relação a essa base.

$$[(x, y)]_\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = a(1, 1) + b(-1, 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a - b = x \\ a + b = y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x + y}{2} \quad e \quad b = \frac{y - x}{2}.$$

Assim, $T(x, y) = T(\ a(1, 1) + b(-1, 1)\ ) = a.T(1, 1) + b.T(-1, 1) = \left(\frac{x + y}{2}\right)(1, 0) + \left(\frac{y - x}{2}\right)(1, 2) =$

$$= \left(\frac{x + y}{2} + \frac{y - x}{2},\ \ \frac{2y - 2x}{2}\right) = (y,\ y - x).$$

Logo, $T(x, y) = (y,\ y - x)$.

Observe que esta lei satisfaz as condições do problema: T(1, 1) = (1, 0) e T(–1, 1) = (1, 2).

3) T: $M_2(R) \to R$, tal que $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$; $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$; $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$; $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$.

Solução: Como $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x\,T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\,T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\,T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w\,T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x + 4y - z + 3w.$$

4) T: $R^3 \to R^2$, tal que T(1, 0, 0) = (1, 2), T(0, 1, 0) = (1, 1) e T(0, 0, 1) = (1, 0).

Solução:

Como $(x, y, z) = x.(1, 0, 0) + y.(0, 1, 0) + z.(0, 0, 1)$, então

T(x, y, z) = T(x.(1, 0, 0) + y.(0, 1, 0) + z.(0, 0, 1)) = x.T(1, 0, 0) + y.T(0, 1, 0) + z.T(0, 0, 1) =

= x.(1, 2) + y.(1, 1) + z.(1, 0) = (x + y + z , 2x + y).

Logo, T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y).

Observe que esta lei satisfaz as condições T(1, 0, 0) = (1, 2), T(0, 1, 0) = (1, 1) e T(0, 0, 1) = (1, 0).

*****

Exercícios:

1) Determine a transformação linear para cada uma das aplicações abaixo:

a) T: $R^2 \to R^3$, tal que $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ e $T(0, 1) = (2, 1, -4)$.

b) T: $R^3 \to R^2$, tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.

c) T: $R^3 \to R^3$, tal que $T(1, 2, 1) = (1, 2, 3)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 5)$ e $T(0, 4, 1) = (0, 3, 2)$.

2) a) Qual a transformação linear T: $R^2 \to R^3$, tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?

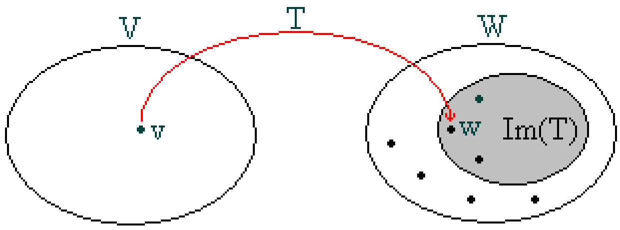
b) Determine $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$, usando o item (a).

Imagem de uma transformação linear

Vamos estudar um subespaço importante do contradomínio W de uma transformação linear $T: V \to W$.

Definição:

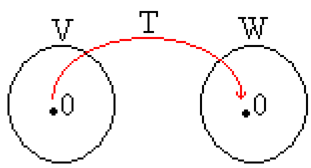
> A **imagem de T**, indicada por **Im(T),** é o conjunto dos vetores w de W tais que existe um vetor v em V que satisfaz $T(v) = w$, isto é,
>
> $$Im(T) = \{w \in W \ / \ \exists\, v \in V \ \text{ e } \ T(v) = w\}.$$



Teorema: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Então a Im(T) é um subespaço vetorial de W.

De fato,

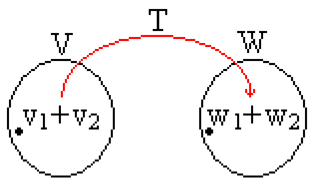
i) $0 \in Im(T)$, pois em qualquer transformação linear $T(0) = 0$.



ii) Sejam w_1 e w_2 vetores pertencentes a Im(T). Então $w_1 + w_2 \in Im(T)$, pois:

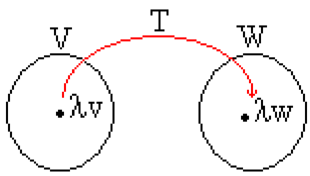
$\exists\, v_1 \in V$ tal que $T(v_1) = w_1$ e $\exists\, v_2 \in V$ tal que $T(v_2) = w_2$. Então,

$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$.



iii) Seja $w \in Im(T)$ e $\lambda \in R$. Então $\lambda w \in Im(T)$. Pois,

$\exists\, v \in V$, tal que $T(v) = w$. Então, $\lambda w = \lambda T(v) = T(\lambda v)$.



Transformação linear sobrejetora

Quando a imagem de uma transformação linear $T: V \to W$ é igual ao contradomínio, dizemos que a transformação T é **sobrejetora**. Para que isto ocorra é necessário que

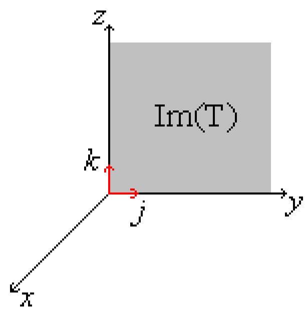
$$\mathbf{dim(Im(T)) = dim(W)}, \text{ já que } Im(T) \subset W.$$

Exemplo: Dada a transformação $T: R^2 \to R^3$, tal que $T(x, y) = (0, x, y)$, determine Im(T).

$Im(T) = \{T(x, y);\ (x, y) \in R^2\} = \{(0, x, y);\ x \text{ e } y \in R\} =$

$= \{x(0, 1, 0) + y(0, 0, 1);\ x \text{ e } y \in R\} = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)].$

A imagem da transformação T é o subespaço gerado pelos vetores $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$. Este subespaço corresponde graficamente ao plano *zy* do R^3:



Neste caso, $dim(Im(T)) = 2 \neq 3 = dim(R^3)$. Assim, a transformação não é sobrejetora.

Os geradores da Im(T) poderiam ser encontrados também de outra forma. Tome uma base qualquer do domínio e calcule a imagem desses vetores. O subespaço gerado por estes vetores é Im(T). No exemplo anterior temos que $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base (canônica) do R^2. Temos então que

$Im(T) = [T(1, 0), T(0, 1)] = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)].$

Este resultado é válido de uma forma geral para todas as transformações lineares e é enunciado da seguinte forma:

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V. Então

$$Im(T) = [T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)].$$

Este resultado nos diz que a imagem de uma transformação linear é gerada pelas imagens dos vetores de uma base qualquer do domínio.

Exemplos: Determine os geradores da imagem das transformações lineares abaixo e também uma base para imagem:

1) T: $R^3 \to R^4$, tal que T(x, y, z) = (x + 2z, 0, y, 0).

T(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0).
T(0, 1, 0) = (0, 0, 1, 0).
T(0, 0, 1) = (2, 0, 0, 0).

Assim, Im(T) = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 0)] = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]. Uma base β para imagem neste caso é β = {(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)}.

Neste caso, dim(Im(T)) = 2 $\neq$ 4 = dim(R^4). Assim, a transformação não é sobrejetora.

2) T: $R^2 \to R^2$, tal que T(x, y) = (−x, y) (Reflexão em torno do eixo OY).

T(1, 0) = (−1, 0).
T(0, 1) = (0, 1).

Assim, Im(T) = [(−1, 0), (0, 1)] = R^2. Uma base β para imagem neste caso é β = {(−1, 0), (0, 1)}.

Neste caso, dim(Im(T)) = 2 = dim(R^2). Assim, a transformação é sobrejetora.

Proposição: Se T: V $\to$ W é uma transformação linear e dim(V) < dim(W), T não pode ser uma transformação sobrejetora.

Exercício: Demonstre esta proposição.

Por exemplo, é impossível obter uma transformação sobrejetora T: $R^3 \to M_2(R)$. Por que?

Núcleo de uma transformação linear

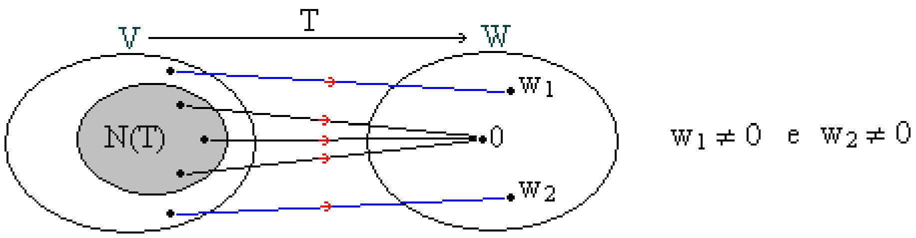
Vamos estudar agora um subespaço importante do domínio V de uma transformação linear T: V $\rightarrow$ W.

Definição:

Seja T: V $\rightarrow$ W uma transformação linear. O **núcleo** de T, indicado por **N(T)**, é o conjunto de todos os vetores v $\in$ V que possuem imagem nula, isto é, T(v) = 0.

$$N(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

N(T) pode também ser indicado por ker(T) e chamado de kernel.



Teorema: Seja T: V $\rightarrow$ W uma transformação linear. Então a N(T) é um subespaço vetorial de V.

De fato,

i) $0 \in N(T)$, pois em qualquer transformação linear T(0) = 0.

ii) Sejam v_1 e v_2 vetores pertencentes a N(T). Então $v_1 + v_2 \in N(T)$, pois:

$T(v_1) = 0$ e $T(v_2) = 0$. Então,

$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0.$

iii) Seja $v \in N(T)$ e $\lambda \in R$. Então $\lambda v \in N(T)$, pois:

$T(v) = 0$ e $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda.0 = 0$.

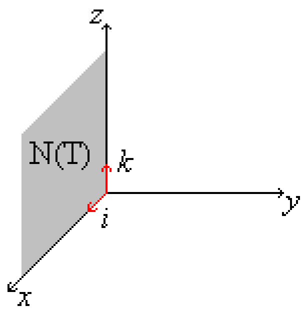
Exemplos:

1) Dada a transformação linear T: $R^3 \rightarrow R^2$, tal que T(x, y, z) = (0, y), temos que:

$N(T) = \{(x, y, z) \in R^3 ; T(x, y, z) = (0, 0)\} = \{(x, y, z) \in R^3 ; (0, y) = (0, 0)\} =$

$= \{(x, y, z) \in R^3 ; y = 0\} = \{(x, 0, z) \in R^3\} = \{x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1) \in R^3\} = [(1, 0, 0), (0, 0, 1)].$

Logo, N(T) = [(1, 0, 0), (0, 0, 1)]. Observe que o núcleo de T é o subespaço gerado pelos vetores i = (1, 0, 0) e k = (0, 0, 1). Graficamente, N(T) é o plano *xz* de R^3:



Observe que $\dim(N(T)) = 2$.

2) Dada a transformação linear $T: R^3 \to R^3$, tal que $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, temos que:

$N(T) = \{(x, y, z) \in R^3;\ T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in R^3;\ x = 0\ \text{ e }\ y = 0\}$.

Logo, $N(T) = \{(0, 0, z) \in R^3;\ \forall z \in R\} = [(0, 0, 1)]$. Observe que N(T) é uma reta do espaço, mais precisamente, N(T) é o eixo OZ. A dimensão do núcleo neste caso é igual a 1.

3) Dada a transformação linear $T: R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = (-x, y)$, temos que:

$$N(T) = \{(x, y) \in R^2; T(x, y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in R^2; (-x, y) = (0, 0)\} =$$
$$= \{(x, y) \in R^2; -x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

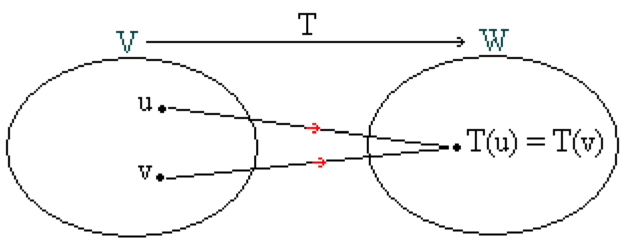
Logo, $N(T) = \{(0, 0)\}$.Observe que N(T) é o subespaço nulo. A dimensão do núcleo neste caso é zero.

O conceito de função injetora se estende naturalmente para as transformações lineares. Afinal uma transformação linear é uma função!! Vamos relembrar a definição.

Transformação linear injetora

> Uma transformação $T: V \to W$ é **injetora** se dados u e $v \in V$, temos que
>
> $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$ ou, de forma equivalente, $u \neq v \Rightarrow T(u) \neq T(v)$

Obs.: De acordo com a definição, uma transformação injetora **não admite** dois vetores distintos do domínio com mesma imagem, isto é, **não** pode ocorrer a situação do diagrama abaixo:



Exemplo: A transformação $T: R^2 \to R^3$, tal que $T(x, y) = (0, x + y, 0)$ não é injetora, pois

$(1, 1) \neq (2, 0)$ mas $T(1, 1) = T(2, 0) = 2$.

Um teorema importante garante que uma transformação linear é injetora se o seu núcleo possui **apenas** o vetor nulo. Observe que na transformação acima $N(T) \neq \{(0, 0)\}$, pois o vetor $(1, -1)$, além de outros vetores, tem imagem nula.

Teorema: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

De fato, seja $v \in N(T)$. Vamos mostrar que v só pode ser o vetor nulo.

$v \in N(T) \Rightarrow T(v) = 0$. Numa transformação linear $T(0) = 0$. Como T é uma transformação injetora, e $T(v) = T(0)$, então $v = 0$.

Reciprocamente, se $N(T) = \{0\}$, vamos mostrar que $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v, \forall u, v \in V$.

$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0 \Rightarrow T(u - v) = 0 \Rightarrow (u - v) \in N(T) = \{0\} \Rightarrow u - v = 0$.

Logo, $u = v$.

Exemplo: A transformação $T: R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = (-x, y)$ é uma transformação injetora, uma vez que calculamos $N(T) = \{(0, 0)\}$.

Exemplo: Sabemos que a transformação $T: R^2 \to R^3$, tal que $T(x, y) = (0, x + y, 0)$ não é injetora, pois $(1, 1) \neq (2, 0)$ mas $T(1, 1) = T(2, 0) = 2$. Podemos verificar este fato também calculando o núcleo desta transformação:

$N(T) = \{(x, y) \in R^2 \ / \ x + y = 0\} = \{(-y, y) \ / \ y \in R\} = [(-1, 1)] \neq \{(0, 0)\}$.

Transformação linear bijetora

Uma transformação $T: V \to W$ é **bijetora** se T é simultaneamente injetora e sobrejetora.

Exemplo: Mostre que a transformação $T: R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = (x + y, x)$ é bijetora.

$N(T) = \{(x, y) \in R^2 \ / \ x + y = 0 \ \text{ e } \ x = 0\} = \{(0, 0)\}$. Logo, **T é injetora**.

T é sobrejetora, pois $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, uma vez que $\mathrm{Im}(T) = [T(1, 0), T(0, 1)] = [(1, 1), (1, 0)] = R^2$.

Exercício: Verifique se a transformação linear $T: R^3 \to R^3$, tal que $T(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ é bijetora.

Exercício: Considere a transformação linear $T: R^2 \to R$, tal que $T(x, y) = x + y$. Determine N(T), Im(T) e as suas dimensões.

$N(T) = \{(x, y) \in R^2 \; ; \; T(x, y) = x + y = 0\} = \{(x, -x) \; ; \; x \in R\} = [(1, -1)]$.

Assim, $N(T) = [(1, -1)]$ e $\dim(N(T)) = 1$.

$Im(T) = [T(1, 0), T(0, 1)] = [1, \;\; 1] = [1]$.
Assim, $Im(T) = [1] = R$ e $\dim(Im(T)) = 1$.

Observe que a dimensão do domínio é igual à soma das dimensões do núcleo e da imagem, isto é,

$$\boxed{\dim(R^2) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))\;.}$$

Este resultado vale de uma forma geral para todas as transformações lineares e está expresso no seguinte teorema:

Teorema do Núcleo e da Imagem

Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então $\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$.

Exercício: Seja $T: R^3 \to R^2$ uma transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$.

a) Determine uma base e a dimensão do núcleo de T;
b) Determine uma base e a dimensão da imagem de T.

Proposição: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear e $\dim(V) > \dim(W)$, T não pode ser uma transformação injetora.

Exercício: Demonstre esta proposição (use o *Teorema do Núcleo e da Imagem*).

Por exemplo, é impossível obter uma transformação injetora $T: M_2(R) \to R^3$. Por que?

Proposição: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Se T é bijetora , então $\dim(V) = \dim(W)$.

Ora, se T é injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$.

Como T também é sobrejetora, então $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Logo, T é bijetora na única condição $\dim(V) = \dim(W)$.

Obs.: Uma transformação linear bijetora também é chamada de ***isomorfismo***.

Matriz associada a uma transformação linear

Vamos agora relacionar as transformações lineares às matrizes e veremos que, num certo sentido, o estudo das transformações lineares é equivalente ao estudo das matrizes.

Consideremos o seguinte exemplo:

Seja A a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e consideremos a transformação linear que indicaremos por T_A:

$T_A : R^3 \to R^2$

$$T_A(x,\ y,\ z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{isto é,} \quad T_A(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y-z \end{pmatrix}.$$

Observe que tomamos o vetor $(x,\ y,\ z)$ na forma de matriz coluna para que a operação com a matriz A estivesse bem definida.

Podemos interpretar $T_A(x,\ y,\ z) = (x+2y+z,\ y-z)$, pois as coordenadas do vetor $T_A(x,\ y,\ z)$ em relação á base canônica β do R^2 é

$$[T_A(x,\ y,\ z)]_\beta = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y-z \end{pmatrix}.$$

Observação: Dada uma matriz $A \in M_{mxn}(R)$, ela pode ser interpretada como uma transformação linear T_A: $R^n \to R^m$ onde os vetores são tomados através de suas coordenadas em relação às bases canônicas do R^n e R^m.

De uma maneira geral, fixada uma matriz A, $A \in M_{mxn}$ (R), e considerando a aplicação T_A do R^n em R^m

$$T_A: R^n \to R^m$$
$$T_A(v) = A \cdot v$$

onde v é considerado um vetor coluna do R^n, isto é, v é uma matriz coluna n x 1, podemos afirmar que T_A é uma transformação linear.

De fato: Usando as propriedades de matrizes já conhecidas, temos que:

$T_A(u + \lambda \cdot v) = A \cdot (u + \lambda \cdot v) = A \cdot u + A \cdot \lambda \cdot v = A \cdot u + \lambda \cdot A \cdot v = T_A(u) + \lambda \cdot T_A(v)$.

Dados V e W espaços vetoriais, $\alpha = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ base de V e $\beta = \{w_1, w_2, ...w_m\}$ base de W, toda matriz A de ordem m x n **induz** uma transformação linear de V em W:

$$T: V \to W$$
$$[T(v)]_\beta = A \cdot [v]_\alpha .$$

Exemplos:

1) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, determine a transformação linear induzida por A de R^3 em R^2, onde $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ são as bases canônicas do R^3 e R^2, respectivamente.

Solução: $T: R^3 \to R^2$

$[T(x, y, z)]_\beta = A[v]_\alpha$

As coordenadas do vetor (x, y, z) em relação à base α são $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$[T(x, y, z)]_\beta = A[v]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

Assim, $T(x, y, z) = (x - y)(1, 0) + (2x + y + 2z)(0, 1) = (x - y,\ 2x + y + 2z)$.

2) Sejam $V = R^2$, considerado com a base $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $W = R^3$ com a base $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determine $T_A: R^2 \to R^3$.

Solução:

$[(x, y)]_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Logo, $[T(x, y)]_\beta = A[(x, y)]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x \\ x + y \end{pmatrix}$.

Portanto, $T(x, y) = (x + 2y)(1, 0, 0) + x(1, 1, 0) + (x + y)(1, 1, 1) = (3x + 3y,\ 2x + y,\ x + y)$.

Definição de matriz associada a uma transformação linear

> Seja $T: V \to W$ uma transformação linear, V e W espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente. Considere $\alpha = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base de V e $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ base de W. Definimos **a matriz da transformação T em relação às bases α e β**, e indicamos por $[T]_\beta^\alpha$, como sendo a matriz de ordem mxn cuja j-ésima coluna é formada pelas coordenadas do vetor $T(v_j)$ na base β.

Observação: No caso em que α e β são as *bases canônicas*, indicamos a matriz da transformação linear simplesmente por [T], isto é, $[T]_\beta^\alpha = [T]$.

Exemplos:

1) Considere V = $\mathbb{R}^3$ e W = $\mathbb{R}^2$ com as suas respectivas bases canônicas α e β.

Sendo T: $R^3 \to R^2$, definida por T(x, y, z) = (x + 2y, y + z), determine a matriz da transformação [T].

Solução: T(1, 0, 0) = (1, 0), T (0, 1, 0) = (2, 1) e T (0, 0, 1) = (0, 1).

Como $[(1, 0)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[(2, 1)]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $[(0, 1)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, então $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Considere V = R^2 e W = R^3 com as suas respectivas bases canônicas α e β.

a) Sendo T: $R^2 \to R^3$, definida por T(x, y) = (3x + 3y, 2x + y, x + y), determine [T].

Solução:

T(1, 0) = (3, 2, 1) e T(0, 1) = (3, 1, 1).

Como $(3, 2, 1)]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $(3, 1, 1)]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, então $[T] = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine T_A: $R^2 \to R^3$.

Solução:

Sendo α a base canônica de R^2, temos que $[(x, y)]_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Assim, $[T(x, y)]_\beta = A[(x, y)]_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 3y \\ 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}$. Sendo β a base canônica de R^3, temos então, T(x, y) = (3x +3y)(1, 0, 0) + (2x + y)(0, 1, 0) + (x + y)(0, 0, 1) = (3x + 3y, 2x + y, x + y).

Assim, T_A(x, y) = (3x + 3y, 2x + y, x + y).

Comparando os resultados dos itens **a)** e **b)**, observe que T(x, y) = T_A(x, y) e que [T] = A.

Concluímos que a transformação T tem como matriz associada a matriz A que induz T_A.

O resultado observado no exemplo 2 anterior é geral para todas as transformações lineares e está traduzido no seguinte teorema:

> Seja T: V $\to$ W uma transformação linear, V e W espaços vetoriais de dimensão finita de bases ordenadas α e β, respectivamente. Então $[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [v]_\alpha$.

Exercício: Considere V = R^2 e W = R^3 com as suas respectivas bases canônicas α e β.

Seja T: $R^2 \to R^3$ a transformação linear induzida pela matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determine T(1, 2).

Solução: Como $[T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $[T(1,2)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [(1,2)]_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Logo, T(1, 2) = 9(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (9, 4, 3).

Exercício: Considere V = R^3 e W = R^2 com as respectivas bases

α = { (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1) } de V e β = { (1, 1), (0, 2) } de W.

Seja $[T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a matriz associada a transformação linear T: $R^3 \to R^2$. Nestas condições, determine T(x, y, z).

Solução: $[T(x,y,z)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [(x,y,z)]_\alpha$. Calcule $[(x,y,z)]_\alpha$ e obtenha $[(x,y,z)]_\alpha = \begin{pmatrix} y \\ y\text{-}x \\ z+x\text{-}y \end{pmatrix}$.

Assim,

$$[T(x,y,z)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [(x,y,z)]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y-x \\ z+x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z+x-y \\ 3y+y-x-(z+x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ -2x+5y-z \end{pmatrix}.$$

$$[T(x,y,z)]_\beta = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ -2x+5y-z \end{pmatrix} \Leftrightarrow T(x,y,z) = (x-2y+z)\cdot(1,1) + (-2x+5y-z)\cdot(0,2) = (x-2y+z, -3x+8y-z)$$

Resposta: T(x, y, z) = (x-2y+z, -3x+8y-z).

Autovalores e autovetores de uma transformação linear

Vamos analisar agora um determinado aspecto de um operador linear T, ou seja, de uma transformação linear de um espaço vetorial V nele próprio, T: V → V.

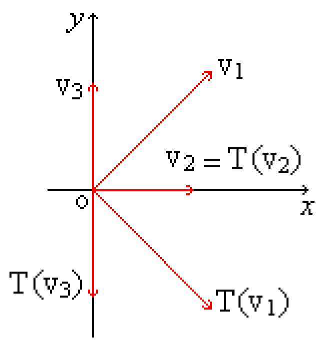
Consideremos a transformação $T : R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (x, -y)$ (reflexão em relação ao eixo ox).

A pergunta que se coloca é:

Existem vetores cujas imagens pelo operador T continuam na mesma reta (com a mesma direção)?

Observemos que:

- Todo vetor que está sobre o eixo OX é mantido fixo por T, isto é, $T(x, 0) = (x, 0)$.
- Todo vetor que está sobre o eixo OY continua sobre o eixo OY, isto é, $T(0, y) = (0, -y) = -(0, y)$.

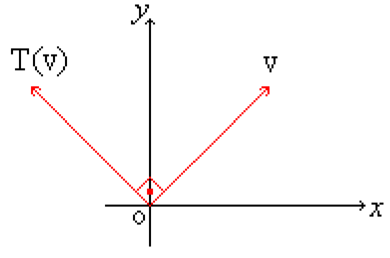


Os eixos OX e OY neste caso são ditos *invariantes* em relação ao operador T. Todo vetor sobre o eixo OX é transformado noutro vetor sobre o mesmo eixo. O mesmo acontece com vetores sobre o eixo OY.

Será que todo operador tem essa propriedade? Isto é, existe sempre um vetor v tal que $T(v) = \lambda v$, sendo λ um número real ?

Vejamos mais um exemplo.

$T: R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (-y, x)$ (Rotação de 90°).



Existe algum vetor v que depois de sofrer uma rotação de 90° continua sobre a mesma reta?

Resp.: Apenas o *vetor nulo* possui essa propriedade.

A nossa questão agora é investigar o seguinte aspecto: Dado um operador linear T: V $\rightarrow$ V, que vetores de V são transformados em múltiplos de si mesmos? Esta investigação vai nos levar aos conceitos de ***autovalor*** e ***autovetor***. Tais conceitos têm inúmeras aplicações, principalmente no estudo das equações diferenciais. Também fornecem informações importantes em projetos de Engenharia e aparecem naturalmente nas áreas de Física e Química.

Definição de autovalor e autovetor

> Seja T: V $\rightarrow$ V um operador linear. Se existe um vetor v $\in$ V (v $\neq$ 0) e $\lambda \in$ R, tal que T(v) = λv dizemos então que $\boldsymbol{\lambda}$ é um **autovalor** de T e **v** é um **autovetor** de T associado a λ.

Observação:

- Os ***autovalores*** são também chamados de ***valores característicos*** ou ***valores próprios***.
- Os ***autovetores*** são também chamados de ***vetores característicos*** ou ***vetores próprios***.

Exemplos:

1) Considere o operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que T(x, y) = (x, −y).

Todos os vetores da forma v = (x, 0), x $\neq$ 0, são autovetores associados ao autovalor λ = 1, uma vez que T(v) = 1.v.

Todos os vetores da forma v = (0, y), y $\neq$ 0, são autovetores associados ao autovalor λ = −1, uma vez que T(v) = −1.v.

2) Considere o operador linear T: V $\rightarrow$ V, tal que T(v) = αv, $\alpha \in$ R.

Claramente percebemos que qualquer vetor v $\neq$ 0 é autovetor associado ao autovalor α.

3) Considere o operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que T(x, y) = (−x, −y) (reflexão em relação à origem).

Todos os vetores v $\neq$ (0,0) são autovetores associados ao autovalor λ = −1, uma vez que T(v) = −v.

4) Considere o operador linear T: $R^3 \rightarrow R^3$, tal que T(x, y, z) = 5(x, y, z).

Todos os vetores v $\neq$ (0,0,0) são autovetores associados ao autovalor λ = 5, uma vez que T(v) = 5v.

Definição:

O conjunto de todos os vetores de V tais que $T(v) = \lambda v$ é um **subespaço** de V chamado de **autoespaço** (ou **subespaço**) **associado ao autovalor** λ e indicado por V_λ.

$$V_\lambda = \{v \in V \ / \ T(v) = \lambda v\}.$$

De fato V_λ é um subespaço de V:

i) $0 \in V_\lambda$, pois $T(0) = 0 = \lambda 0$.

ii) Se v_1 e $v_2 \in V_\lambda$, então $v_1 + v_2 \in V_\lambda$, pois:

$v_1 \in V_\lambda \Rightarrow T(v_1) = \lambda v_1$.

$v_2 \in V_\lambda \Rightarrow T(v_2) = \lambda v_2$.

Assim, $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$.

iii) Se $v_1 \in V_\lambda$ e $k \in R$, então $kv_1 \in V_\lambda$, pois:

$v_1 \in V_\lambda \Rightarrow T(v_1) = \lambda v_1$.

Assim, $T(kv_1) = kT(v_1) = k\lambda v_1 = \lambda(kv_1)$.

Exemplos:

a) Os autoespaços do operador linear $T: R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = (x, -y)$ são:

$V_1 = \{(x, 0); x \in R\}$ e $V_{-1} = \{(0, y); y \in R\}$ como foi verificado no exemplo 1 anterior.

b) O autoespaço do operador linear $T: R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = 3(x, y)$ é:

$V_3 = \{(x, y) \ / \ x \in R \text{ e } y \in R\} = R^2$.

Observe que $T(v) = 3v$, para todo $v \in R^2$.

Cálculo dos autovalores e autovetores

O cálculo dos autovalores e autovetores pode se tornar bastante trabalhoso se usarmos simplesmente a definição. Vamos buscar um método prático para encontrar autovalores e, conseqüentemente, autovetores de um operador T. Isso será obtido através da matriz associada ao operador.

Definição:

> Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definimos os autovalores e autovetores de A como sendo os autovalores e autovetores da transformação induzida por A, em relação à base canônica do R^n.
>
> $T: R^n \to R^n$
> $T(v) = Av.$

Assim, um autovalor $\lambda \in R$ e um autovetor $v \in R^n$ são as soluções da equação $Av = \lambda v$, pois:

$$T(v) = Av \quad \text{e} \quad T(v) = \lambda v.$$

Queremos, portanto, encontrar os valores de λ tais que $Av = \lambda v$, para $v \neq 0$.

$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I_n v \Leftrightarrow Av - \lambda I_n v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0.$

Obs.: I_n é a matriz identidade de ordem n.

A equação matricial $\mathbf{(A - \lambda I_n)v = 0}$ nos leva a um *sistema quadrado homogêneo* com n equações e n incógnitas. Uma vez que estamos procurando autovetores $v \neq 0$, não queremos que o sistema tenha apenas a solução trivial (caso em que não haverá autovetor). Estamos, portanto, interessados no caso em que o sistema seja possível indeterminado (tenha infinitas soluções). Isto acontecerá se $\mathbf{det(A - \lambda I_n) = 0}$ (lembre-se da *Regra de Cramer*: Se o sistema é homogêneo, então o determinante da matriz dos coeficientes nulo implica num sistema possível indeterminado).

Exemplo 1:

Encontre os autovalores, os autovetores e os autoespaços do operador $T: R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = (-x, y)$.

Solução: A matriz associada a este operador linear é $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Queremos encontrar os valores de λ tais que $(A - \lambda I_2)v = 0$. Assim:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema acima terá solução não trivial se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$.

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1-\lambda).(1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1+\lambda-\lambda+\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1.$$

Os autovalores são, portanto, $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. Para cada um deles encontramos os seguintes autoespaços associados:

Para $\lambda = 1$:

$$(A - \lambda I_2)v = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - I_2)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}.$$

A solução deste sistema é $x = 0$, $\forall y$, isto é, $\{(x, y) \in R^2 \,;\; x = 0\} = [(0, 1)]$.

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é $V_1 = [(0, 1)]$.

Para $\lambda = -1$:

$$(A - \lambda I_2)v = 0 \quad \Rightarrow \quad (A + I_2)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 2y = 0 \end{cases}.$$

A solução deste sistema é $y = 0$, $\forall x$, isto é, $\{(x, y) \in R^2 \,;\; y = 0\} = [(1, 0)]$.

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = -1$ é $V_{-1} = [(1, 0)]$.

Exemplo 2:

Encontre os autovalores, os autovetores e os autoespaços do operador $T: R^3 \to R^3$, tal que $T(x, y, z) = (-2z,\; x + 2y + z,\; x + 3z)$.

Solução: A matriz associada a este operador linear é $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Queremos encontrar os valores de λ tais que $(A - \lambda I_3)v = 0$. Assim:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema acima terá solução não trivial se, e somente se, $det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$.

$$det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

Lembremos o seguinte fato: Todas as soluções inteiras (se houver) de uma equação polinomial

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_n = 0$$

com coeficientes inteiros c_i são divisores do termo independente c_n.

No nosso caso, $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, as únicas possíveis soluções inteiras são os divisores de -4, ou seja, ± 1, ± 2 e ± 4. Substituindo sucessivamente cada um destes valores na equação encontramos rapidamente $\lambda = 1$ como uma raiz. Logo, podemos fatorar esta equação (usando o dispositivo prático de *Briot-Ruffini*) como

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \text{ (verifique!)}$$

Os autovalores são, portanto, $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Para cada um deles encontramos os seguintes autoespaços associados:

Para $\lambda = 1$:

$$(A - \lambda I_3)v = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - I_3)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -1x + 0y - 2z = 0 \\ 1x + 1y + 1z = 0 \\ 1x + 0y + 2z = 0 \end{cases}.$$

O conjunto solução deste sistema é:

$\{(x, y, z) \in R^3 ;\ x = -2z \text{ e } y = z\} = \{(-2z, z, z) / z \in R\} = \{z(-2, 1, 1) / z \in R\} = [(-2, 1, 1)]$.

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é $V_1 = [(-2, 1, 1)]$.

Para $\lambda = 2$:

$(A - \lambda I_3)v = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 2I_3)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x + 0y - 2z = 0 \\ 1x + 0y + 1z = 0 \\ 1x + 0y + 1z = 0 \end{cases}.$$

O conjunto solução deste sistema é:

$\{(x, y, z) \in R^3 ;\ x = -z \} = \{(-z, y, z) / z , y \in R\} = \{z(-1, 0, 1) + y(0, 1, 0) / z , y \in R\} =$

$= [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)]$.

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ é $V_2 = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)]$.

*****

Os casos analisados nos exemplos anteriores são gerais, isto é, valem para todos os operadores lineares e estão traduzidos nos seguintes resultados:

> Seja T: V $\rightarrow$ V um operador linear, α uma base de V e dim(V) = n. Resolver a equação $T(v) = \lambda v$ é equivalente a resolver a equação
>
> $AX = \lambda I_n X$, onde $A = [T]_\alpha^\alpha$ e $X = [v]_\alpha$.

Os autovalores (e autovetores) de um operador linear T são os mesmos da matriz associada a T em relação a uma base qualquer.

> Seja T: V $\rightarrow$ V um operador linear, α uma base de V e dim(V) = n. Se $A = [T]_\alpha^\alpha$, então:
>
> λ é autovalor de T $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Observemos que $\det(A - \lambda I_n) = 0$ é um polinômio na variável λ. Este polinômio é chamado de ***polinômio característico*** da matriz A (ou de T).

EXERCÍCIOS GERAIS

1. Verifique se a transformação $T:\Re^2 \to \Re^2$, tal que $T(x,y)=(x+y,\ \ 5y)$ é linear.

2. a) Qual a transformação linear $T:\Re^2 \to \Re^3$ tal que $T(1,2)=(3,-1,4)$ e $T(-1,3)=(2,-4,1)$?
   b) Determine, *se possível*, o vetor $(x,y)\in\Re^2$, tal que $T(x,y)=(5,-1,\ -7)$.

3. Considere a transformação linear $T:\Re^3 \to \Re^4$ tal que $T(x,y,z)=(0,\ \ 0,\ \ x-2y+z,\ \ 5z)$.

a) Determine uma base para *N*(*T*);

b) Determine, justificando, *dim* (*N*(*T*)) e *dim* (*Im*(*T*));

c) Determine, justificando, geradores para *Im*(*T*);

d) *T* é sobrejetora? Justifique a sua resposta.

4. a) Determine uma transformação linear $T:\Re^3 \to \Re^3$, tal que
$N(T)=\{(x,y,z)\in\Re^3\ /\ x+y+z=0\}$ e $T(0,0,2)=(1,1,1)$.

   b) Determine $[T(-1,2,1)]_\beta$, sendo $\beta=\{(2,3,-1),(-1,2,3),(-2,-7,0)\}$ base de $\Re^3$.

5. Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T:\Re^2 \to \Re^3$ nas bases $A=\{(1,-1),(1,0)\}$ do $\Re^2$ e $B=\{(-1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ do $\Re^3$ é

$$[T]_B^A=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}:$$

a) Encontre a expressão de $T(x,y)$;

b) Determine, se possível, $v\in\Re^2$ tal que $T(v)=(-2,-2,1)$.

6. Os vetores $v_1=(1,\ 1)$ e $v_2=(2,\ -1)$ são *autovetores* de um operador linear $T:\Re^2 \to \Re^2$, associados aos autovalores $\lambda_1=5$ e $\lambda_2=-1$, respectivamente. Determine a imagem do vetor $v=(4,\ 1)$ por esse operador.

Referências Bibliográficas:

Álgebra Linear – *Alfredo Steinbruch / Paulo Winterle.*
Álgebra Linear – *Boldrini / Costa / Figueiredo / Wetzler.*
Álgebra Linear – *Caliolli.*
Álgebra Linear com Aplicações – *Anton / Rorres.*
Álgebra Linear e suas Aplicações – *David C. Lay.*