



FACULDADE DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cursos de Engenharia

Prof. Álvaro Fernandes Serafim

Apostila Nº 2
de
Álgebra Linear



Última atualização: 01/12/2007.

Esta apostila de Álgebra Linear foi elaborada pelos Professores *Adelmo Ribeiro de Jesus*, *Ilka Rebouças Freire* e *Maria Amélia Barbosa*. A formatação e adaptação é do Professor *Álvaro Fernandes Serafim*.

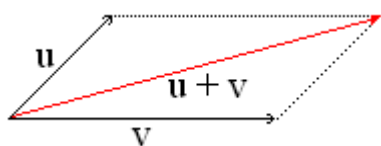
Temas desta apostila:

- Espaços vetoriais - - - - - pág. 1
- Subespaços vetoriais - - - - - pág. 6
- Combinação linear - - - - - pág. 9
- Subespaço gerado - - - - - pág. 11
- Operações com subespaços vetoriais - - - - - pág. 16
- Interseção de subespaços vetoriais - - - - - pág. 16
- Soma de subespaços vetoriais - - - - - pág. 18
- Dependência e independência linear - - - - - pág. 20
- Base e dimensão - - - - - pág. 24
- Base ordenada e coordenadas de um vetor - - - - - pág. 30
- Exercícios gerais - - - - - pág. 32

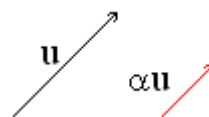
Espaços vetoriais

Os espaços vetoriais constituem o objeto de estudo da Álgebra Linear. No curso de Geometria Analítica foram estudados os conjuntos de vetores no plano e no espaço. Lembremos que duas operações foram definidas nestes conjuntos, a adição de vetores e a multiplicação por um escalar:

1. Adição de vetores



2. Multiplicação por um escalar



Estas duas operações gozam de determinadas propriedades e são as mesmas operações que estão também definidas, por exemplo, no conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ em R . Vamos agora generalizar esta estrutura apresentada no conjunto dos vetores do espaço e das matrizes de ordem $m \times n$. O conceito de vetor vai ser estendido estabelecendo-se as propriedades mais usuais dos vetores como postulados.

Definição: Seja V um conjunto não vazio. V é dito um **espaço vetorial sobre R** se:

I) Está definida uma **adição** em V que associa a cada par de elementos u e v um único elemento em V , indicado por $u + v$ e chamado de soma de u com v , que satisfaz as seguintes propriedades, $\forall u, v, w \in V$:

- i) $u + v = v + u$, (comutativa).
- ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$, (associativa).
- iii) Existe $0 \in V$, tal que $0 + u = u$, (0 é chamado de elemento neutro, ou **vetor nulo**).
- iv) Para todo $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que $u + (-u) = 0$, ($-u$ é chamado de **vetor oposto** de u).

II) Está definida uma **multiplicação por escalar** em V que associa cada escalar $\alpha \in R$ e cada elemento $v \in V$ um único vetor $\alpha v \in V$, que goza das seguintes propriedades, $\forall \alpha, \beta \in R$ e $\forall u, v \in V$:

v) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

vii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

viii) $1 \cdot u = u$.

Observações:

1. Podemos também considerar, na definição de espaço vetorial, os escalares como sendo *números complexos* e, neste caso, o espaço é chamado de **espaço vetorial complexo** (ou sobre C).
2. Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores.
3. O vetor nulo 0 também pode ser denotado por $\vec{0}$.
4. Neste curso só iremos trabalhar com espaços vetoriais reais.

Exemplos:

1) $V = R^2$ é um espaço vetorial real.

$R^2 = \{(x, y); x, y \in R\}$ é o conjunto dos pontos do plano. Um par ordenado (x, y) tanto pode ser interpretado como um ponto do plano ou como um vetor do plano (vetor a partir da origem até o ponto (x, y)). Veja a figura 1.

2) $V = R^3$ é um espaço vetorial real.

$R^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in R\}$ é o conjunto dos pontos do espaço. Um terno ordenado (x, y, z) tanto pode ser interpretado geometricamente como um ponto do espaço ou como um vetor do espaço (vetor a partir da origem até o ponto (x, y, z)). Veja a figura 2.

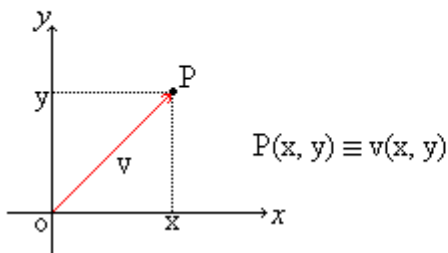


figura 1

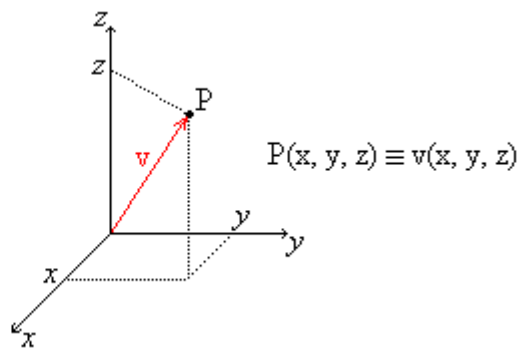


figura 2

Embora nossa visualização geométrica não se estenda além do espaço tridimensional, podemos considerar muitas das propriedades algébricas e numéricas estendendo-as a outros espaços, além do tridimensional. A idéia de se utilizar pares de números ordenados para situar pontos no plano e ternos de números ordenados para situar pontos no espaço se consolidou em meados do século XVII e é a idéia básica da Geometria Analítica. Na segunda metade do século XVIII os matemáticos e físicos perceberam que poderiam usar seqüências ordenadas com quatro, cinco, n números, para representar pontos num espaço de dimensão maior. É o que formalizamos no exemplo 3 a seguir.

3) Se n é um inteiro positivo, dizemos que uma seqüência (x_1, x_2, \dots, x_n) de números reais é uma n -upla ordenada. O conjunto das n -uplas ordenadas é chamado de espaço n -dimensional e denotada por R^n .

$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in R\}$ é um espaço vetorial com as operações:

- Adição: $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.
- Multiplicação por escalar: $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$, $\alpha \in R$.

4) $V = M_{m \times n}(R)$ - Conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com elementos em R é um espaço vetorial real com as operações de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar já definidas.

Obs.: Se $m = n$, então denotaremos $M_{m \times n}(R)$ simplesmente por $M_n(R)$.

Por exemplo, consideremos $V = M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}; x, y, z, w \in R \right\}$ com as operações usuais definidas no conjunto das matrizes:

- Adição: $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}$.
- Multiplicação por escalar: $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha w \end{pmatrix}$.

O conjunto $V = M_2(R)$ (conjunto das matrizes de ordem 2×2 com elementos reais) satisfaz todos os postulados de espaço vetorial.

5) $V = P_n(R)$ - Conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n , com coeficientes em R é um espaço vetorial real com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por um escalar:

- Adição:

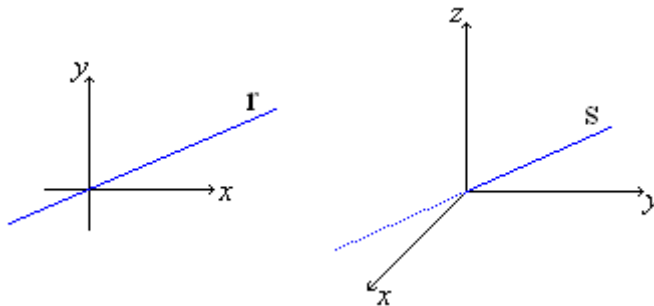
$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

- Multiplicação por escalar:

$$\alpha \cdot (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \dots + \alpha a_nx^n$$

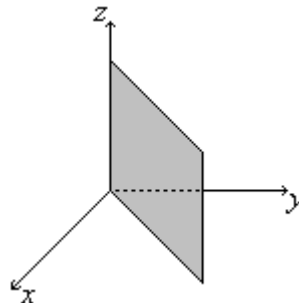
6) Toda reta (no plano ou no espaço) que passa pela origem é um espaço vetorial.

Por exemplo, no plano \mathbb{R}^2 , temos que $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = kx\}$ é um espaço vetorial, pois este conjunto satisfaz todos os postulados da definição. Brevemente este conjunto será chamado de **subespaço vetorial**.



7) Todo plano que passa pela origem é um espaço vetorial do \mathbb{R}^3 .

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}$ satisfaz todos os postulados de espaço vetorial. Brevemente este conjunto também será chamado de **subespaço vetorial**.



Contra-exemplos:

1) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1\} \subset V = \mathbb{R}^2$ não possui o elemento neutro da adição $(0, 0)$. Além disso, se considerarmos também dois pontos sobre a reta, por exemplo, $w_1 = (1, 0)$ e $w_2 = (0, 1)$, a soma $w_1 + w_2 = (1, 1)$ não está sobre a reta $x + y = 1$.

2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\} \subset V = \mathbb{R}^3$ não tem elemento o neutro da adição $(0, 0, 0)$. Além disso, se considerarmos dois pontos sobre o plano, a soma também não está sobre o plano. (Para ver isso, dê um exemplo numérico).

3) **Generalizando:** Retas e planos que não passam pela origem não são espaços vetoriais, pois além de não conterem o vetor nulo, não satisfazem a propriedade do fechamento da adição.

Subespaços vetoriais

Às vezes é necessário detectar dentro de um espaço vetorial subconjuntos W que são também espaços vetoriais. Vimos, por exemplo, que as retas que passam pela origem (no plano) são espaços vetoriais que estão contidos no \mathbb{R}^2 . Da mesma forma, planos que passam pela origem são espaços vetoriais, contidos no \mathbb{R}^3 .

Exemplo: Consideremos $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = kx\} = \{(x, kx) \in \mathbb{R}^2\}$. Graficamente, W é uma reta passando pela origem.

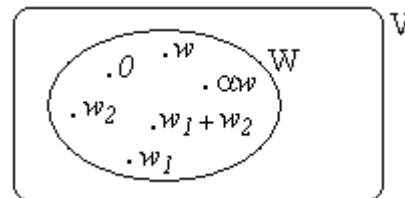
W é também um espaço vetorial, pois

- $(x_1, kx_1) + (x_2, kx_2) = (x_1 + x_2, kx_1 + kx_2) = (x_1 + x_2, k(x_1 + x_2)) \in W$. Esta operação satisfaz as propriedades de i) a iv) da definição de espaço vetorial.
- $\alpha(x_1, kx_1) = (\alpha x_1, k\alpha x_1) \in W$. Esta operação satisfaz as propriedades de v) a viii) da definição de espaço vetorial.

Um subconjunto de um espaço vetorial V que é, ele mesmo, um espaço vetorial em relação às operações de adição e multiplicação por escalar, definidas em V , recebe o nome de **subespaço vetorial de V** .

Proposição: Dado um espaço vetorial V , um subconjunto W de V , $W \neq \emptyset$, é um subespaço vetorial de V se, e somente se:

- a) O vetor nulo $0 \in W$;
- b) Se $w_1, w_2 \in W$ então $w_1 + w_2 \in W$;
- c) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $w \in W$ então $\alpha w \in W$.



Observações:

1. Estas três condições garantem que ao operar vetores em W não obteremos vetores fora de W .
2. Por esta proposição, para mostrar que um subconjunto W de V é um subespaço de V não precisamos testar todos os 8 postulados de espaço vetorial. Basta verificar se W contém o vetor nulo e as operações de *adição e multiplicação por escalar* estão fechadas em W . Com isto W é também espaço vetorial e as propriedades que são válidas em V também são em W , pois $W \subset V$. Por exemplo, $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$ porque esta propriedade é válida para TODOS os elementos de V .
3. Todo espaço vetorial V admite, pelo menos, dois subespaços $W = V$ e $W = \{0\}$. Estes subespaços são chamados de **subespaços triviais** de V .

Exemplos de subespaços vetoriais

1. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y); y = kx\}$ (retas passando pela origem). Este conjunto satisfaz as três condições de subespaço vetorial.

2. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z); ax + by + cz = 0\}$ (planos passando pela origem). Este conjunto satisfaz as três condições de subespaço vetorial. De fato:

a) O vetor nulo $(0,0,0) \in W$.

b) Considerando os vetores (x_1, y_1, z_1) e $(x_2, y_2, z_2) \in W$, temos que $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$. Assim, $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$, pois $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0 = 0$.

c) Considerando $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, y_1, z_1) \in W$, temos que $\alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in W$, pois $a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) = \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1) = \alpha \cdot 0 = 0$.

3. $V = M_2(\mathbb{R})$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ o conjunto das matrizes triangulares superiores de

ordem 2. Este conjunto satisfaz as três condições de subespaço vetorial. De fato:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.

b) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in W$.

c) $\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ 0 & \alpha c_1 \end{pmatrix} \in W$.

4. Consideremos o conjunto-solução W de um sistema linear homogêneo de ordem 3 e $V = M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$. O sistema pode ser dado na forma matricial por $A \cdot X = 0$, sendo A uma matriz quadrada de ordem 3. Este conjunto satisfaz as três condições de subespaço vetorial. De fato:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Obviamente a solução nula está no conjunto W .

b) Se X_1 e $X_2 \in W$, então $A \cdot X_1 = 0$ e $A \cdot X_2 = 0$. Logo, $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$ e portanto $X_1 + X_2 \in W$.

c) Seja $X_1 \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $A(\alpha X_1) = \alpha AX_1 = \alpha \cdot 0 = 0$. Logo, $\alpha X \in W$.

Interpretando geometricamente o conjunto-solução W , podemos ter:

i) Um plano que passa pela origem.

Exemplo:
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \\ 3x - 6y + 9z = 0 \end{cases} \text{ escalonado obtemos } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0.$$

ii) Uma reta que passa pela origem.

Exemplo:
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 7y - 8z = 0 \\ -2x + 4y - 6z = 0 \end{cases} \text{ escalonado obtemos } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

As duas equações representam planos que passam pela origem, e o sistema resultante pode ser interpretado como a equação da reta que é interseção dos dois planos. Um vetor genérico dessa reta é escrito como $(-5z, -z, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

iii) A origem.

Exemplo:
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 7y - 8z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \end{cases} \text{ cujo conjunto-solução é o subespaço nulo.}$$

iv) Todo o espaço.

Exemplo:
$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \text{ cujo conjunto-solução é } M_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \text{ que é um subespaço trivial.}$$

Combinção Linear

Dados dois ou mais vetores de um espaço vetorial, esses vetores podem ser “combinados” usando-se as duas operações de um espaço vetorial: adição e multiplicação por um escalar. O vetor resultante é chamado de uma combinação linear. Exemplo: $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$, o vetor v é uma combinação linear dos vetores v_1 , v_2 e v_3 .

Exemplo: Seja $V = \mathbb{R}^2$.

O vetor $v = (7, 6)$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, 3)$, uma vez que podemos escrever $v = (7, 6) = 3(2, 1) + 1(1, 3) = 3v_1 + 1v_2$.

De uma maneira geral, temos a seguinte definição:

Definição: Seja V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. O vetor

$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$ é chamado de **combinação linear** dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Obs.: $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i \Leftrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

Exemplos e contra exemplos

1) O vetor $v = (2, 2, 3)$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 4, 6)$, uma vez que $v = 2v_1 + (1/2)v_2$.

2) A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ é uma combinação linear das matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De fato, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) O vetor $(1, 1, 2)$ não é combinação linear dos vetores $(1, 0, 1)$ e $(2, 1, 1)$.

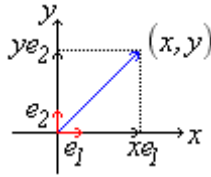
Vamos verificar se existem escalares a e b tais que $(1, 1, 2) = a(1, 0, 1) + b(2, 1, 1)$.

$$(1, 1, 2) = a(1, 0, 1) + b(2, 1, 1) \Rightarrow (1, 1, 2) = (a, 0, a) + (2b, b, b) \Rightarrow$$

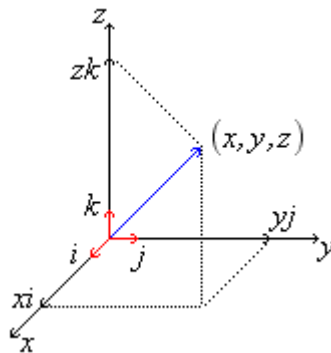
$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Este sistema é impossível. (Substituindo $b = 1$ na 1ª equação obtemos $a = -1$ e estes valores não satisfazem a 3ª equação!).

4) Todo vetor de \mathbb{R}^2 é uma combinação linear dos vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. De fato, dado um vetor (x,y) qualquer do \mathbb{R}^2 , temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$.



5) Todo vetor (x,y,z) do \mathbb{R}^3 é uma combinação linear dos vetores $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ e $k = (0,0,1)$. De fato, $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + k(0,0,1) = xi + yj + zk$.



6) Toda matriz do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ é uma combinação linear das matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De fato: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercícios:

1. Verifique quais dos seguintes vetores abaixo são combinação linear dos vetores $u = (0, -2, 2)$ e $v = (1, 3, -1)$.

a) $(2, 2, 0)$.

b) $(3, 1, 5)$.

c) $(0, 0, 0)$.

2. Expresse, se possível, os vetores abaixo como combinação linear de $u = (2, 1, 4)$, $v = (1, -1, 3)$ e $w = (3, 2, 5)$.

a) $(-9, -7, -15)$.

b) $(0, 0, 0)$.

c) $(7, 8, 9)$.

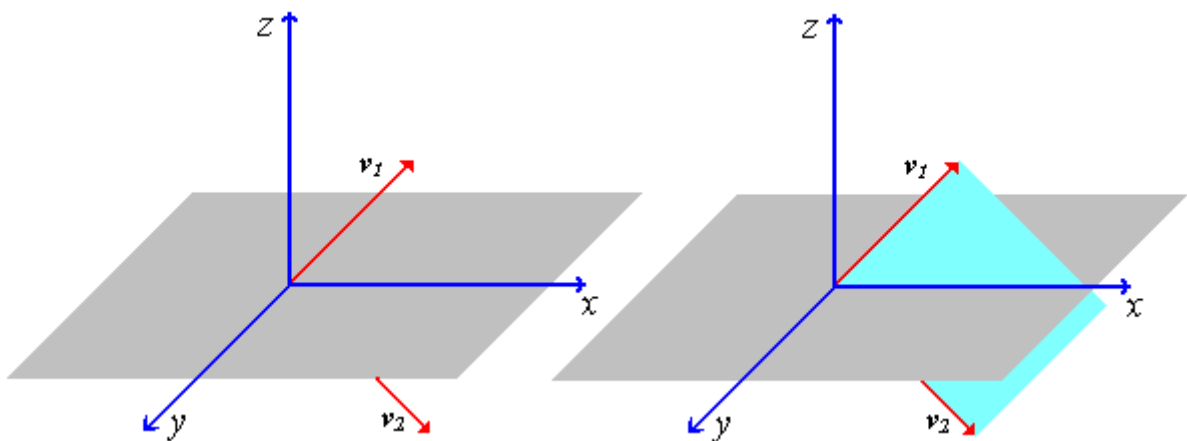
3. Verifique se a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é combinação linear das matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Subespaço gerado

Como já vimos em Geometria Analítica, os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ são geradores do plano XOY . Isto significa que todo vetor $v = (x, y, 0)$ desse plano é combinação linear de v_1 e v_2 . Analogamente, dados n vetores v_1, v_2, \dots, v_n fixos em um determinado espaço vetorial V , alguns vetores de V podem ser combinação linear desses vetores v_1, v_2, \dots, v_n e outros não. O conjunto W , consistindo de todos os vetores que podem ser obtidos como combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n é um subespaço vetorial de V , chamado subespaço gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Teorema: Seja V espaço vetorial. Considere $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Então, o conjunto $W = \{v \in V / v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n\}$ de todas as combinações lineares de v_1, v_2, \dots, v_n é um subespaço vetorial de V .

W é chamado de **subespaço gerado** por v_1, v_2, \dots, v_n e denotado por $W = [v_1, v_2, \dots, v_n]$. Os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são chamados de **geradores** de W .



Vejamos a demonstração do Teorema para o caso particular de 2 vetores, ou seja, $W = [v_1, v_2]$.

a) Observemos inicialmente que $W \neq \emptyset$, pois $\vec{0} = 0v_1 + 0v_2$. Logo, $\vec{0} \in W$.

b) Sejam w_1 e $w_2 \in W$.

Temos que $w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ e $w_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$, sendo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 escalares reais.

Então $w_1 + w_2 = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2$ é também uma combinação linear de v_1 e v_2 . Em outras palavras, $w_1 + w_2 \in W$.

c) Seja $w_1 \in W$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Então $\beta w_1 = \beta(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (\beta\alpha_1)v_1 + (\beta\alpha_2)v_2$ é também uma combinação linear de v_1 e v_2 , ou seja, $\beta w_1 \in W$.

A demonstração para uma quantidade finita de vetores de W é feita de forma análoga.

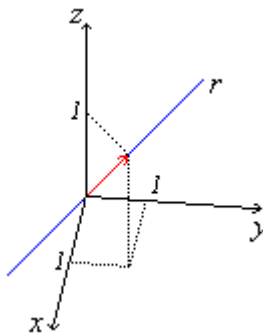
Exemplos:

1. Consideremos o vetor $v = (1, 0)$ do plano e $W = [(1, 0)]$. O espaço gerado por v é o conjunto de todas as combinações lineares do vetor $(1, 0)$ o que no plano cartesiano corresponde ao eixo OX . Resumindo, $[(1, 0)] = \{(x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$.
2. $W = [(1, 1)]$ é o conjunto de todas as combinações lineares do vetor $(1, 1)$ o que corresponde no plano à reta $y = x$ (1ª bissetriz).
3. Se $v = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $v \neq 0$, então $[v] = \{k(x_0, y_0); k \in \mathbb{R}\}$ é uma reta no plano passando pela origem.
4. $W = [v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 1)]$. Não é difícil mostrar que qualquer vetor $v = (x, y)$ do \mathbb{R}^2 é combinação linear de v_1 e v_2 . Logo, $[v_1, v_2] = \mathbb{R}^2$.

De fato: $(x, y) = c_1(1, 1) + c_2(-1, 1) \Rightarrow x = c_1 - c_2$ e $y = c_1 + c_2$. Encontrando c_1 e c_2 em função de x e y obtemos: $c_1 = (x + y)/2$ e $c_2 = (y - x)/2$. Assim, qualquer vetor (x, y) pode ser escrito como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1)$.

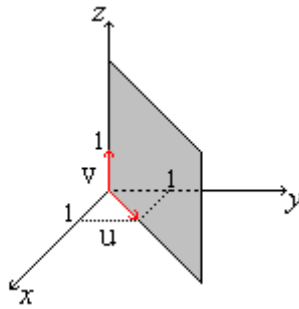
Por exemplo: $(2, 4) = 3(1, 1) + 1(-1, 1)$ e $(-1, 5) = 2(1, 1) + 3(-1, 1)$.

5. $\mathbb{R}^2 = [(1, 0), (0, 1)]$. É fácil verificar que qualquer vetor do plano é combinação de $(1, 0)$ e $(0, 1)$. De fato: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.
6. $W = [(1, 1, 1)]$ é o conjunto de todas as combinações lineares do vetor $(1, 1, 1)$ (neste caso particular, todos os múltiplos do vetor $(1, 1, 1)$). Isto corresponde à reta r do espaço, que passa pela origem e que tem a direção do vetor $(1, 1, 1)$. Veja a reta na figura abaixo.



7. $W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ é o subespaço do \mathbb{R}^3 que corresponde ao plano XOY . De fato, qualquer que seja $v \in W$, temos que $v = (x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$.

8. $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ corresponde ao plano determinado pelos vetores $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 0, 1)$.



9. $R^3 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Qualquer vetor do espaço pode ser escrito como uma combinação linear desses três vetores. De fato, temos $v = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$.

O resultado a seguir nos diz que se retirarmos ou acrescentarmos, a um conjunto de geradores, um vetor que **pertence** ao espaço gerado, o espaço gerado permanece o mesmo.

Teorema: Seja V espaço vetorial sobre R e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Se $v \in [v_1, v_2, \dots, v_n]$, então $[v_1, v_2, \dots, v_n, v] = [v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Para mostrar a igualdade entre os subespaços $W_1 = [v_1, v_2, \dots, v_n, v]$ e $W_2 = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, vamos mostrar que $W_1 \subset W_2$ e que $W_2 \subset W_1$.

$W_1 \subset W_2$. De fato, seja $u \in W_1$, então $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + a_{n+1}v$, $a_i \in R$ para todo $i = 1, 2, \dots, n+1$. Como $v \in [v_1, v_2, \dots, v_n]$, então $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n$, $b_i \in R$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Desta forma, podemos escrever a seguinte combinação linear para u

$$u = (a_1 + a_{n+1} \cdot b_1)v_1 + (a_2 + a_{n+1} \cdot b_2)v_2 + \dots + (a_n + a_{n+1} \cdot b_n)v_n.$$

Isto mostra que $u \in W_2$.

$W_2 \subset W_1$. Isto é óbvio, pois se $u \in W_2$, então $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$. Desta forma, podemos escrever $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + 0v$. Logo $u \in W_1$.

Exemplos:

1. $[(1, 1, 0), (2, 2, 0)] = [(1, 1, 0)]$.

Ou $[(1, 1, 0), (2, 2, 0)] = [(2, 2, 0)]$.

2. $[(1, 0), (0, 1), (1, 1)] = [(1, 0), (0, 1)]$.

Ou $[(1, 0), (0, 1), (1, 1)] = [(1, 0), (1, 1)]$ ou $[(1, 0), (0, 1), (1, 1)] = [(0, 1), (1, 1)]$.

De uma forma geral,

$$[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2] = [v_1, v_3] = [v_2, v_3], \quad \text{se } a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0, \quad a_i \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

$$\text{Pois } \begin{cases} v_1 = (-a_2/a_1)v_2 + (-a_3/a_1)v_3 \\ v_2 = (-a_1/a_2)v_1 + (-a_3/a_2)v_3 \\ v_3 = (-a_1/a_3)v_1 + (-a_2/a_3)v_2 \end{cases}.$$

Este resultado pode ser estendido para uma quantidade maior de vetores.

Exercícios resolvidos

1) Determine geradores para os seguintes subespaços:

a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$.

b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}$.

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0 \text{ e } x + 2y = 0\}$.

Soluções:

a) Vamos determinar a solução geral do sistema homogêneo $\{x + y = 0\}$.

$$x = -y.$$

$$\text{Assim, } (x, y) = (-y, y) = y(-1, 1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Logo, $W = [(-1, 1)]$. Você pode verificar que o vetor $(-1, 1)$ satisfaz a equação $x + y = 0$.

b) Vamos determinar a solução geral do sistema homogêneo $\{x - y - z = 0\}$.

$$x = y + z.$$

$$\text{Assim, } (x, y, z) = (y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1), \quad y \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$

Logo, $W = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$. Você pode verificar que os vetores $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ satisfazem a equação $x - y - z = 0$.

c) Vamos determinar a solução geral do sistema homogêneo $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 2y + 0z = 0 \end{cases}$.

$$x = -2y \quad \text{e} \quad z = x - y = -2y - y = -3y.$$

$$\text{Assim, } (x, y, z) = (-2y, y, -3y) = y(-2, 1, -3), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Logo, $W = [(-2, 1, -3)]$. Você pode verificar que o vetor $(-2, 1, -3)$ satisfaz as equações do sistema.

2) Encontre as equações lineares homogêneas que caracterizam os seguintes subespaços:

a) $W = [(1,0,1), (1,2,1)]$.

Solução: Um elemento genérico $v = (x, y, z)$ de W é combinação linear dos vetores $(1,0,1)$ e $(1,2,1)$, isto é, **existem** constantes reais a e b , tais que, $v = (x, y, z) = a(1,0,1) + b(1,2,1)$, o que nos leva ao sistema

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2b = y \\ a + b = z \end{cases}.$$

Devemos verificar as condições para que este sistema tenha solução.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y/2 \\ 0 & 0 & z-x \end{pmatrix}.$$

Vemos que o sistema terá solução (isto é, existirão as constantes a e b) se $z - x = 0$.

Logo, $W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z - x = 0\}$. Você pode verificar que os vetores $(1,0,1)$ e $(1,2,1)$ satisfazem a equação $z - x = 0$.

b) $W = [(1,0,3,1), (1,2,4,3)]$.

Solução: Um elemento genérico $v = (x, y, z, w)$ de W é combinação linear dos vetores $(1,0,3,1)$ e $(1,2,4,3)$, isto é, **existem** constantes reais a e b , tais que, $v = (x, y, z, w) = a(1,0,3,1) + b(1,2,4,3)$, o que nos leva ao sistema

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2b = y \\ 3a + 4b = z \\ a + 3b = w \end{cases}.$$

Devemos verificar as condições para que este sistema tenha solução.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \\ 1 & 3 & w \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & z-3x \\ 0 & 2 & w-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y/2 \\ 0 & 1 & z-3x \\ 0 & 2 & w-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y/2 \\ 0 & 0 & z-3x-y/2 \\ 0 & 0 & w-x-y \end{pmatrix}.$$

Vemos que o sistema terá solução (isto é, existirão as constantes a e b) se $w - x - y = 0$ e $z - 3x - (y/2) = 0$.

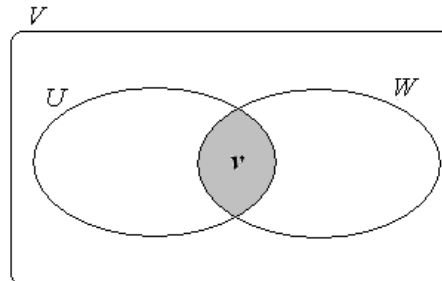
Logo, $W = \{(x, y, z, w) \in R^4 \mid w - x - y = 0 \text{ e } 2z - 6x - y = 0\}$. Você pode verificar que os vetores $(1,0,3,1)$ e $(1,2,4,3)$ satisfazem as equações $w - x - y = 0$ e $2z - 6x - y = 0$.

Operações com subespaços vetoriais

1) **Interseção** de subespaços vetoriais.

Definição: Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . Indicamos por $U \cap W$ o conjunto

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ e } v \in W\}.$$



Proposição: Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V , então $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V .

De fato, $U \cap W$ satisfaz as condições para um subespaço de V :

a) Como U e W são subespaços de V , então $0 \in U$ e $0 \in W$. Assim, $0 \in (U \cap W)$.

b) Sejam v_1 e v_2 dois vetores de $U \cap W$.

$v_1 \in (U \cap W)$, então $v_1 \in U$ e $v_1 \in W$.

$v_2 \in (U \cap W)$, então $v_2 \in U$ e $v_2 \in W$.

Como v_1 e v_2 pertencem a U , então $v_1 + v_2$ pertencem a U .

Como v_1 e v_2 pertencem a W , então $v_1 + v_2$ pertencem a W .

Assim, $v_1 + v_2$ pertencem simultaneamente a U e a W , logo pertencem a $U \cap W$.

c) Fica como um exercício!

Exemplo: Sejam $U = [(1, 0)]$ e $W = [(0, 1)]$, ambos subespaços de $V = \mathbb{R}^2$. Determine o subespaço $U \cap W$.

A melhor forma de trabalharmos com interseção de subespaços é trabalharmos com as **equações dos subespaços envolvidos**. Desta forma,

$$U = [(1, 0)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \quad \text{e} \quad W = [(0, 1)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

Para obtermos $U \cap W$, juntamos todas as equações, de U e de W , num único conjunto e resolvemos o sistema, encontrando por fim o(s) gerador(es) da $U \cap W$.

Assim, $U \cap W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y=0 \text{ e } x=0\}$.

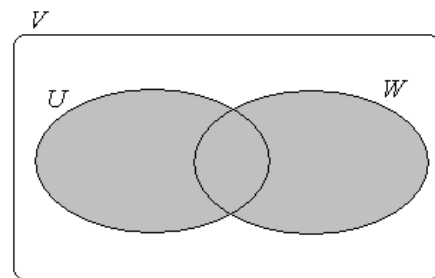
Resolvemos então o sistema $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$, cuja solução é $(x, y) = (0, 0)$. Logo, $U \cap W = [(0, 0)]$.

A interseção entre U e W é o espaço nulo de \mathbb{R}^2 .

Graficamente, $U \cap W$ é a interseção das retas $y=0$ e $x=0$, eixos Ox e Oy do plano, respectivamente.

Observação: A união entre dois subespaços vetoriais U e W , simbolicamente $U \cup W$, não é um subespaço vetorial, necessariamente.

$$U \cup W = \{v \in V / v \in U \text{ ou } v \in W\}$$



Podemos perceber, no exemplo anterior, que

$$v_1 = (2, 0) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y=0\}, \text{ logo } v_1 \in (U \cup W) \text{ e}$$

$$v_2 = (0, 2) \in W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x=0\}, \text{ logo } v_2 \in (U \cup W).$$

Mas $v_1 + v_2 = (2, 2) \notin (U \cup W)$, pois $(2, 2) \notin U$ e $(2, 2) \notin W$.

De uma forma geral...

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . Obviamente, se $U \subset W$, então $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V , situação da figura 1. Se $W \subset U$, então $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V , situação da figura 2.

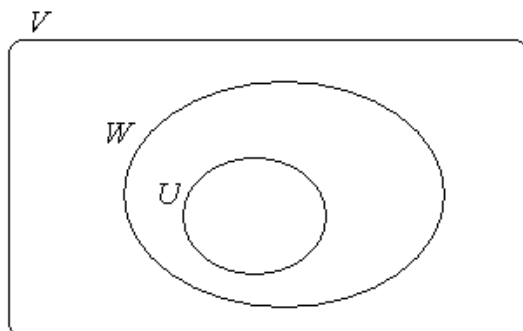


Figura 1

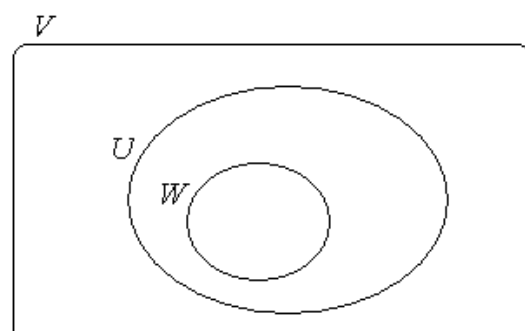


Figura 2

2) **Soma** de subespaços vetoriais.

Definição: Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . Indicamos por $U+W$ o conjunto

$$U+W = \{u+w / u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

Proposição: Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V , então $U+W$ é um subespaço vetorial de V .

De fato, $U+W$ satisfaz as condições para um subespaço de V :

a) Como U e W são subespaços de V , então $0 \in U$ e $0 \in W$. Assim, $0 = 0+0 \in (U+W)$.

b) Sejam v_1 e v_2 dois vetores de $U+W$.

$v_1 \in (U+W)$, então $v_1 = u_1 + w_1$, onde $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$.

$v_2 \in (U+W)$, então $v_2 = u_2 + w_2$, onde $u_2 \in U$ e $w_2 \in W$.

Como u_1 e u_2 pertencem a U , então $u_1 + u_2$ pertencem a U .

Como w_1 e w_2 pertencem a W , então $w_1 + w_2$ pertencem a W .

Desta forma, $v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$. Assim, $v_1 + v_2 \in (U+W)$.

c) Fica como um exercício!

Definição: Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V , tais que $U \cap W = \{0\}$. Nesta situação, dizemos que o subespaço $U+W$ é **soma direta** dos subespaços U e W .

Notação para soma direta $U \oplus W$.

Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V e $V = U \oplus W$, dizemos que U e W são *subespaços suplementares*, ou que U é suplemento de W (ou W é suplemento de U).

Exemplo: Sejam $U = [(1, 0)]$ e $W = [(0, 1)]$, ambos subespaços de $V = \mathbb{R}^2$. Determine o subespaço $U+W$.

$$U+W = \{u+w / u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

$$U = [(1, 0)] = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \text{ e } W = [(0, 1)] = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}.$$

Desta forma, $U+W = \{(x, 0) + (0, y) / x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

Portanto, $U+W = \mathbb{R}^2$.

Do ponto de vista geométrico, “a soma dos eixos Ox e Oy é o plano \mathbb{R}^2 ”.

De uma forma mais simples e direta, podemos obter o espaço soma **reunindo** todos os geradores de U e W , formando o subespaço $U + W$:

$$U = [(1, 0)] \text{ e } W = [(0, 1)]. \text{ Obtemos, então } U + W = [(1, 0), (0, 1)] = \mathbb{R}^2.$$

Pergunta: É verdade, neste exemplo, que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$?

Sim, pois verificamos que $U + W = \mathbb{R}^2$, além de termos visto que $U \cap W = \{(0, 0)\}$.

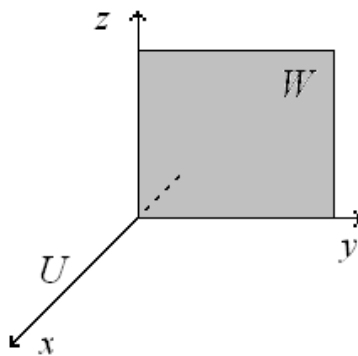
A partir deste exemplo, podemos generalizar um resultado prático:

Para determinarmos os geradores de $U + W$, basta **unirmos** os geradores de U e W .

Em outras palavras, se $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ e $W = [w_1, w_2, \dots, w_m]$, então

$$U + W = [u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_m].$$

Exercício: Mostre que \mathbb{R}^3 é soma direta dos subespaços $U = \{(x, 0, 0) / x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\}$.



Proposição: Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . Então $V = U \oplus W$ se, e somente se, cada vetor $v \in V$ admite uma única decomposição $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.

Dependência e independência linear

Já sabemos que se $v \in [v_1, v_2, \dots, v_n]$, então $[v_1, v_2, \dots, v_n, v] = [v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Isto significa dizer que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são suficientes para gerar o subespaço $[v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Exemplo: $W = [(1, 1, 0)] = [(1, 1, 0), (2, 2, 0)]$.

Todo vetor de W pode ser escrito como combinação linear de $(1, 1, 0)$ e também de $(1, 1, 0)$ e $(2, 2, 0)$.

Por exemplo:

$(3, 3, 0) \in W$ e $(3, 3, 0) = 3(1, 1, 0)$. Podemos também escrever

$(3, 3, 0) = 3(1, 1, 0) + 0(2, 2, 0)$ ou $(3, 3, 0) = 0(1, 1, 0) + 3/2(2, 2, 0)$.

Observemos que o vetor $(3, 3, 0)$ é escrito de maneira **única** como combinação de $(1, 1, 0)$, mas tem **infinitas** maneiras de se escrever $(3, 3, 0)$ como combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(2, 2, 0)$. Um problema fundamental em Álgebra Linear é saber o número **mínimo** de vetores necessários para gerar um espaço. Este problema está relacionado com as condições para que um vetor seja escrito de maneira única como combinação linear de um conjunto de vetores. Vamos apresentar um conceito que terá grande importância na análise desta questão.

Definição: Seja V espaço vetorial sobre R e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente (L.I)** ou que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes se a **única** solução da equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

é a **trivial**, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Se a equação acima admite uma solução não trivial, isto é, se existe algum $\alpha_j \neq 0$, tal que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, então dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente (L.D.)** ou que os vetores são linearmente dependentes.

Exemplos:

1. Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são L.I..

De fato: Tomando a combinação linear $a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0)$, obtemos $a = 0$ e $b = 0$.

2. É fácil verificar que os vetores $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$ são L.I..

3. O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é L.I.. De fato:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

4. $\{\vec{0}\}$ é L.D.. De fato: Existem **infinitas** soluções para a equação $\alpha \vec{0} = \vec{0}$.

5. $\{\vec{v}\}$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$ é L.I.. De fato: $\alpha \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$.

6. O conjunto $\{(1, 2), (1, 1)\}$ é L.I.. Pois

$$a(1, 2) + b(1, 1) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (0, 0).$$

7. O conjunto $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6)\}$ é L.D..

De fato, considerando a combinação linear nula $a(1, 2, 3) + b(2, 4, 6) = (0, 0, 0)$, obtemos infinitas soluções para a e b (resolva!), por exemplo $a = -2$ e $b = 1$ é uma solução não trivial desta equação.

8. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é L.D..

De fato, a equação $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tem solução não trivial, pois

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos os seguintes exemplos:

1. $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6)\}$ é L.D. e $(2, 4, 6) = 2 \cdot (1, 2, 3)$.

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é L.D. e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Percebemos nestes exemplos que num conjunto L.D. um dos vetores é combinação linear dos outros. Isto vale de uma forma geral.

Teorema: Seja V espaço vetorial sobre R e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Então:

i) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é L.D. \Leftrightarrow um dos vetores é combinação linear dos demais.

ii) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é L. I. \Leftrightarrow nenhum vetor pode ser escrito como combinação linear dos demais.

Como conseqüências deste teorema temos os seguintes resultados:

1. Qualquer conjunto de vetores que contenha um subconjunto L.D. é L.D..
2. Qualquer conjunto de vetores contendo o vetor nulo é L.D..
3. Todo subconjunto de um conjunto L.I. é L.I..
4. Um conjunto de dois vetores é L.D. se, e somente se, um deles é um múltiplo escalar do outro.

Exemplos:

a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é L.I.. Também são L.I. os conjuntos $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ e $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

b) $\{(1, 2), (2, 4), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ é L.D., pois existe vetor neste conjunto que é combinação linear dos outros.

c) Em R^2 (ou em R^3) se dois vetores são L.D., então estes vetores estão sobre uma reta passando pela origem.

d) Em R^3 se três vetores são L.D., então estes vetores estão sobre um mesmo plano passando pela origem.

Exercícios:

1. Sejam u, v e $w \in R^3$. Determine sob que condições o conjunto $\{u, v, w\}$ é L.I.

Solução: Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Vamos tomar uma combinação linear nula destes vetores, isto é, $xu + yv + zw = (0, 0, 0)$. Isto nos leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} xu_1 + yv_1 + zw_1 = 0 \\ xu_2 + yv_2 + zw_2 = 0 \\ xu_3 + yv_3 + zw_3 = 0 \end{cases}.$$

Assim, o conjunto $\{u, v, w\}$ é L.I. se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \neq 0$. Neste caso, o sistema

tem a solução única trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ (lembre-se da *Regra de Cramer*!).

2) Use o exercício anterior para verificar se os vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ são L.I..

Solução: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, então os vetores são L.I..

3) Mostre que os vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ geram o R^3 .

Solução: $(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0)$ nos leva ao sistema $\begin{cases} a + b + c = x \\ a + c = y \\ a + b = z \end{cases}$.

Escalonando este sistema obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y-x+z \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-z \end{pmatrix}.$$

Verificamos que o sistema tem solução única, qualquer que seja (x, y, z) . Desta forma, $\forall v \in R^3$, v pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$, ou seja, $R^3 = [(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)]$.

Os dois exercícios anteriores nos mostram que o conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ é L.I. e estes vetores geram o R^3 , isto é, $R^3 = [(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)]$. Isto significa dizer que o conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ é uma **base** para o R^3 , como veremos a definição a seguir.

Base e dimensão

Definição: Um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores de um espaço V é dito uma **base** de V se, e somente se:

- 1) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente;
- 2) $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, isto é, o espaço V é gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Obs.: Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base para V , então qualquer vetor de V é escrito de maneira **única** como uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Exemplos:

1. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base do R^2 .
2. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base do R^3 .
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base do $M_2(R)$.

Obs.: As bases dos três exemplos anteriores são chamadas de **bases canônicas**.

4. O conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ é uma base do R^3 (vimos nos dois exercícios anteriores que este conjunto é L.I. e gera o R^3).
5. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **não** é uma base do $M_2(R)$. Os vetores são L.I., mas **não geram** o $M_2(R)$.
6. $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ **não** é uma base do R^2 . Os vetores geram o R^2 , mas não são L.I.

Voltemos a este exemplo 6:

Os vetores $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ geram o R^2 e são L.D. Podemos escrever qualquer um deles como combinação dos outros dois:

$$(1, 0) = (1, 1) - (0, 1).$$

$$(0, 1) = (1, 1) - (1, 0).$$

$$(1, 1) = (1, 0) + (0, 1).$$

Logo, qualquer um dos vetores pode ser desprezado e os dois restantes continuam gerando o R^2 , ou seja, $R^2 = [(1, 0), (0, 1)] = [(1, 0), (1, 1)] = [(0, 1), (1, 1)]$. Além disso, o conjunto que resta é L.I., isto é, $\{(1, 0), (0, 1)\}$, $\{(1, 0), (1, 1)\}$ e $\{(0, 1), (1, 1)\}$ são conjuntos L.I. e, portanto, qualquer um destes conjuntos formam uma base para o R^2 .

Este fato está expresso no seguinte teorema:

Teorema: Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores não nulos que **geram** um espaço vetorial V . Então, entre estes vetores podemos extrair uma base para V .

De fato, se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é um conjunto L.I., então este já forma uma base de V . Caso contrário, existe um vetor que pode ser escrito como combinação linear dos demais. Logo este vetor pode ser “excluído” do conjunto. Se os vetores restantes são L.I., então formam base de V . Caso contrário existe um outro vetor que é combinação linear dos demais e pode ser “excluído”. Continuamos com o processo, “desprezando” os vetores “supérfluos” até obtermos um conjunto L.I. e, portanto, uma base para o espaço com um número mínimo de geradores.

Teorema: Seja V espaço vetorial sobre R e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base para V . Então qualquer conjunto no espaço V com mais de n vetores é necessariamente L.D..

Exemplos:

1. Três ou mais vetores no plano (R^2) são sempre L.D..
2. Quatro ou mais vetores no espaço (R^3) são sempre L.D.
3. Cinco ou mais matrizes de ordem 2×2 (em $M_2(R)$) são sempre L.D.

Observação: O teorema anterior é equivalente a “Um espaço vetorial gerado por n vetores tem no máximo n vetores L.I.” e tem como consequência que

“Qualquer base de um espaço vetorial V tem sempre **o mesmo número de vetores**”.

Este fato nos permite dar a seguinte definição:

Definição: Seja V espaço vetorial sobre R . O número de vetores de uma base qualquer de V é chamado de **dimensão de V** e indicado por **$\dim(V)$** .

Exemplos:

1. $\dim(R^2) = 2$, $\dim(R^3) = 3$. Generalizando: $\dim(R^n) = n$.
2. $\dim(M_2(R)) = 4$. Generalizando: $\dim(M_{m \times n}(R)) = m \cdot n$.
3. $\dim(P_2(R)) = 3$, $\dim(P_3(R)) = 4$. Generalizando: $\dim(P_n(R)) = n + 1$.

Observações:

- 1) Existem espaços vetoriais em que o número de elementos da base é infinito (por exemplo, o espaço das funções contínuas reais de variável real). Só trabalharemos neste curso com espaços de dimensão finita.
- 2) Se W é subespaço vetorial de V e $\dim(V) = n$ então $\dim(W) \leq n$.
- 3) Se V é o espaço nulo, isto é, $V = [\vec{0}]$, então $\dim(V) = 0$.

Teorema: Seja V espaço vetorial sobre R , tal que $\dim(V) = n$. Então qualquer conjunto L.I. de V pode ser completado até formar uma base para V .

De fato, seja $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ L.I. ($r \leq n$, pois $\dim(V) = n$). Se $V = [v_1, v_2, \dots, v_r]$, então $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ já é base de V . Caso contrário, existe um vetor em V que não pertence ao subespaço $[v_1, v_2, \dots, v_r]$. Acrescentamos então este vetor ao conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ obtendo ainda um (novo) conjunto L.I.. Se este novo conjunto gerar o espaço V , temos a base procurada. Caso contrário, continuamos com o processo até obtermos a base procurada. O fato da dimensão do espaço ser finita nos garante que o processo tem fim.

Conseqüência: Se $\dim(V) = n$, então qualquer conjunto com n vetores L.I. formará uma base para V .

De fato, caso não formasse, poderíamos, pelo teorema, completar até formar uma base e obteríamos assim um conjunto L.I. com mais de n vetores, o que é uma contradição.

Exemplo:

O conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (1,2,1)\}$ é L.I.. Como $\dim(R^3) = 3$, este conjunto forma uma base para o R^3 .

Observação:

- 1) Se temos um conjunto de n vetores que geram um espaço de dimensão n , podemos garantir que este conjunto é L.I. e, portanto, forma uma base para o espaço.
- 2) Se temos um conjunto de n vetores L.I. de um espaço de dimensão n , podemos garantir que o conjunto gera o espaço e, portanto, forma uma base para o mesmo.

Processo prático para a determinação de uma base de subespaços de R^n

I. Conhecendo-se os seus geradores.

Seja V um subespaço de R^n e $V = [v_1, v_2, \dots, v_r]$. Observemos que:

- 1) Mudando a ordem dos vetores geradores não alteramos o subespaço gerado ($v_i \leftrightarrow v_j$);
- 2) Multiplicando qualquer vetor gerador por um escalar não nulo, não alteramos o subespaço gerado ($v_i \leftrightarrow kv_i$).
- 3) Substituindo qualquer vetor gerador por ele somado a um outro vetor multiplicado por uma constante, não alteramos o subespaço gerado ($v_i \leftrightarrow v_i + kv_j$).

As operações citadas acima correspondem às **operações elementares** sobre as linhas de uma matriz. Desta forma, dado um conjunto de geradores, escrevemos os vetores como linhas de uma matriz de ordem $r \times n$ e escalonamos a matriz. A matriz escalonada resultante tem por linhas vetores que geram o mesmo espaço. Desprezando-se as eventuais linhas nulas, as restantes correspondem a vetores L.I. que geram o subespaço e, portanto, formam uma base para o mesmo.

Exemplo 1: Encontre uma base para o seguinte subespaço:

$$U = [(1, 0, 1, 2), (2, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 4)] \subset R^4.$$

Solução:

Vamos escalonar a matriz cujas linhas são os vetores geradores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $U = [(1, 0, 1, 2), (2, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 4)] = [(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4)]$ e $\{(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4)\}$ é uma base para U que possui dimensão 2.

Observação.: A quantidade de vetores não nulos na matriz escalonada nos dá a dimensão do espaço.

Exemplo 2: Encontre uma base e a dimensão para o seguinte subespaço:

$$U = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \subset M_2(\mathbb{R}).$$

Solução:

Neste caso, podemos associar uma matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ do $M_2(\mathbb{R})$ a um vetor (x, y, z, w) do \mathbb{R}^4 e resolvemos o problema de forma análoga ao exemplo 1 anterior. Ao final, retornamos ao espaço original de matrizes.

Associando às matrizes aos vetores:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (-1, 2, 1, 0), \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (2, -3, 0, 1) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (-1, 1, -1, -1).$$

Vamos escalonar a matriz cujas linhas são os vetores geradores $(-1, 2, 1, 0)$, $(2, -3, 0, 1)$ e $(-1, 1, -1, -1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Associando os vetores não nulos às matrizes:

$$(-1, 2, 1, 0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (0, 1, 2, 1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $U = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$ e

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ é uma base para } U \text{ que possui dimensão } 2.$$

II. A partir de um conjunto L.I.

O método descrito anteriormente também serve para se estender um conjunto de vetores L.I. até obter uma base para um espaço vetorial V .

Exemplo 3: Encontrar, se possível, uma base para o R^4 que contenha o conjunto $\{(1,1,0,0), (2,1,3,0)\}$.

Colocamos os vetores como linhas de uma matriz e buscamos mais duas linhas de forma que a matriz resultante esteja na forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Quaisquer dois vetores que tomemos $(0,0,x,y)$ e $(0,0,0,z)$ de maneira que a matriz acima fique escalonada **sem linhas nulas** servem como exemplo. Neste caso, a base procurada poderia ser $\{(1,1,0,0), (2,1,3,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$.

Exemplo 4: Encontrar, se possível, uma base para o $M_2(R)$ que contenha o conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Disponemos as matrizes (já associadas aos respectivos vetores do R^4) como linhas de uma matriz e buscamos mais uma linha de forma que a matriz resultante esteja na forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qualquer vetor que tomemos $(0, x, y, z)$ com $x \neq 0$. Isto garante que a matriz acima fique escalonada **sem linhas nulas**. Neste caso, a base procurada poderia ser

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Base ordenada e coordenadas de um vetor

Vamos trabalhar agora com bases ordenadas de um espaço vetorial V . Sabemos que $B_1 = \{(1,0), (0,1)\}$ e $B_2 = \{(0,1), (1,0)\}$ são bases de \mathbb{R}^2 . O que diferencia a base B_1 de B_2 é a ordem dos vetores. Esta ordem é de fundamental importância quando desejamos identificar a combinação linear de um vetor no \mathbb{R}^2 . Por exemplo, chamando v_1 o primeiro vetor e v_2 o segundo vetor das bases, temos que $5v_1 + 3v_2 = (5,3)$ usando a base B_1 e $5v_1 + 3v_2 = (3,5)$ usando a base B_2 . Podemos perceber que uma mesma combinação linear gera vetores distintos a depender da ordem dos vetores da base.

Base ordenada

Uma base ordenada é uma base na qual fixamos a ordem dos seus vetores, isto é, quem é o primeiro vetor, quem é o segundo vetor, etc.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Dada uma base ordenada $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , então todo vetor v desse espaço pode ser escrito, de forma única, como uma combinação linear dos vetores de B .

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

Exemplo: Seja $B = \{(1,0,0), (0,4,6)\}$ a base ordenada de um espaço vetorial contido em \mathbb{R}^3 . Podemos escrever, de forma única, o vetor $v = (2,2,3)$ como $v = 2v_1 + (1/2)v_2$, onde $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (0,4,6)$.

A partir de agora, todas as bases que iremos trabalhar serão ordenadas, de tal forma que chamaremos simplesmente de base ao invés de base ordenada.

Coordenadas de um vetor

Os escalares a_1, a_2, \dots, a_n que aparecem na igualdade $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$, são chamados *coordenadas do vetor v em relação à base B* , cuja notação é dada em forma de matriz coluna

$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

No exemplo acima, temos então que $[(2,2,3)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, onde $B = \{(1,0,0), (0,4,6)\}$.

Exercício: Determine as coordenadas do vetor v em relação à base B nos casos a seguir.

a) $v = (3, 4, 1)$ e $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

b) $v = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \right\}$.

EXERCÍCIOS GERAIS

1. Considere os subespaços do \mathbb{R}^3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + z = -x, x = -2y \text{ e } 2x + 5y = -z \right\} \\ V = \left[(2, 1, 0), (-1, 3, 7), (1, 4, 7) \right] \end{array} \right. \quad . \quad \text{Determine, justificando:}$$

a) As equações lineares homogêneas que caracterizam o subespaço V e $\dim(V)$.

b) Geradores para o subespaço W e $\dim(W)$.

c) Geradores para o subespaço $V \cap W$ e $\dim(V \cap W)$.

d) O vetor $\vec{v} = (2, 2, 2)$ pertence ao subespaço V ? Por quê?

e) Geradores para $V + W$. Podemos dizer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$? Justifique.

2. Com relação ao conjunto

$$A = \left\{ (-2, 0, 4, 8), (3, 1, -1, 4), (3, 3, 5, 8), (2, 1, -1, -6) \right\} \subset \mathbb{R}^4, \text{ responde:}$$

a) Este conjunto é *L.I.* ou *L.D.* **Justifique.**

b) Qual a dimensão do subespaço gerado pelos vetores do conjunto A ? **Justifique.**

3. Determine, se possível, o valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que o conjunto

$$\left\{ (1, 1, 2), (-3, 2, 1), (2, -3, k) \right\} \text{ seja } L.I. .$$

4. Considere o subespaço $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x + y = -w, x + z = -2y \text{ e } y + z = w \right\}$.

Determine, justificando:

a) Uma base para W .

b) $\dim(W)$.

5. Diga, justificando, se o conjunto $\beta = \left\{ (-1, 1, 1) \right\}$ é uma base do subespaço $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = z \right\}$. Qual dimensão de W ?

6. Dê, se possível, exemplo:

a) De um conjunto *L.I.* com 3 vetores do \mathbb{R}^3 que contenha o conjunto $A = \left\{ (3, -3, 0), (-2, 2, 0) \right\}$.

b) De um conjunto *L.I.* com 4 matrizes do $M_2(\mathbb{R})$ que contenha o conjunto $C = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Respostas:

- 1) a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$ e $\dim(V) = 2$.
- b) $W = [(2, -1, 1)]$ e $\dim(W) = 1$.
- c) $V \cap W = \{(0, 0, 0)\}$ e $\dim(V \cap W) = 0$.
- d) Sim, pois este vetor satisfaz a equação $x - 2y + z = 0$ que caracteriza o subespaço V .
- e) $V + W = [(2, 1, 0), (-1, 3, 7), (1, 4, 7), (2, -1, 1)] = \dots = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = \mathbb{R}^3$.
 $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$, pois $V + W = \mathbb{R}^3$ e $V \cap W = \{(0, 0, 0)\}$.
- 2) a) *L.D.*
- b) Dimensão 3.
- 3) $k \neq -3$.
- 4) a) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Esta resposta não é única!
- b) $\dim(W) = 2$.
- 5) Não, pois $\dim(W) = 2$ e β possui apenas um vetor *L.I.* do espaço W .
- 6) a) Não é possível, pois qualquer conjunto que contenha A é *L.D.*, pois A é *L.D.*.
- b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Esta resposta não é única!

Referências Bibliográficas

- Álgebra Linear – *Alfredo Steinbruch / Paulo Winterle.*
- Álgebra Linear – *Boldrini / Costa / Figueiredo / Wetzler.*
- Álgebra Linear – *Caliolli.*
- Álgebra Linear com Aplicações – *Anton / Rorres.*