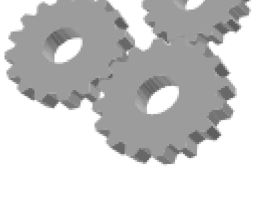
FACULDADE DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cursos de Engenharia

Prof. Álvaro Fernandes Serafim

Apostila Nº 1 de Álgebra Linear



Última atualização: 01/12/2007.

Esta apostila de Álgebra Linear foi elaborada pela Professora ***Ilka Rebouças Freire*** e pelo Professor ***Álvaro Fernandes Serafim***.

Temas desta apostila:

Matrizes

Um conglomerado é composto por 5 lojas numeradas e 1 a 5. A tabela a seguir apresenta o faturamento, em reais, nos quatro primeiros dias do mês de agosto de um determinado ano.

	01/08	***02/08***	***03/08***	***04/08***
Loja *1*	*1.950*	*2.000*	*1.800*	*1.950*
Loja *2*	*1.500*	*1.800*	*2.000*	*2.300*
Loja *3*	*3.000*	*2.800*	*2.900*	*2.500*
Loja *4*	*2.500*	*3.000*	*2.750*	*1.900*
Loja *5*	*2.000*	*2.350*	*2.450*	*3.000*

- Qual o faturamento da loja 3 no dia 2?
- Qual o faturamento total de todas as lojas no dia 3?
- Qual o faturamento total da loja 1 nos 4 dias?

Podemos representar a tabela acima, abstraindo o significado de suas linhas e colunas, da seguinte maneira (que chamamos de **matriz**):

$$\begin{pmatrix} 1950 & 2000 & 1800 & 1950 \\ 1500 & 1800 & 2000 & 2300 \\ 3000 & 2800 & 2900 & 2500 \\ 2500 & 3000 & 2750 & 1900 \\ 2000 & 2350 & 2450 & 3000 \end{pmatrix}$$

- Esta matriz possui *5 linhas* (representando o número de lojas) e *4 colunas* (representando o número de dias). Dizemos que ela possui *ordem 5x4*;
- Os elementos desta matriz são os números que representam o faturamento;
- Um elemento genérico de uma matriz é representado por a_{ij}, onde i indica a linha que ele ocupa e j a coluna.
- Para a matriz acima temos $a_{11} = 1950$; $a_{32} = 2800$; etc...
- Para a situação apresentada na matriz acima, temos que $a_{ij} =$ faturamento da loja *i* no dia *j*.

Definição: Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$, dois números inteiros. A matriz de ordem *mxn* (lê-se *m* por *n*), que indicaremos $A = (a_{ij})_{mxn}$, consiste em $m \cdot n$ elementos dispostos em *m linhas* e *n colunas*, conforme a tabela

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde a_{ij} indica o elemento da *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna.

Temos a variação de i como $i = 1,2,3,\ldots,m$ e a variação de j como $j = 1,2,3,\ldots,n$.

Observação: O elemento a_{ij} pode pertencer a qualquer conjunto (números, funções, polinômios, matrizes, etc). Trabalharemos com matrizes em que os elementos a_{ij} serão **números reais**.

Existe uma série de situações em que utilizamos a representação matricial.

Exemplos:

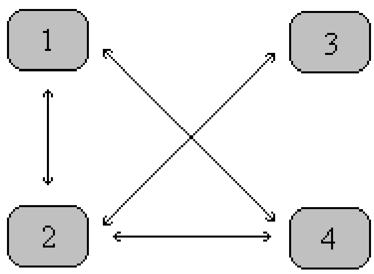
1. A matriz P abaixo fornece a quantidade de vitaminas A, B e C (representadas nas colunas) contidas nos alimentos I e II (representados nas linhas).

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $a_{13} = 0$ indica que não existe vitamina C no alimento I.

2. Considere a ligação entre pontos (os quais podem representar pessoas, cidades, países, etc.) representada ao lado.

Seja $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ está ligado a } j. \\ 0, & \text{se } i \text{ não está ligado a } j. \end{cases}$



A forma matricial do diagrama, admitindo-se que todo ponto está ligado a si mesmo, é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Curiosidade A palavra matriz deriva da palavra latina ***mater***, que significa "mãe". Quando o sufixo "iz" é acrescentado, o significado torna-se "útero". Assim como um útero envolve um feto, os colchetes de uma matriz envolvem seus elementos. Assim como o útero dá origem a um bebê, uma matriz gera certos tipos de funções chamadas *transformações lineares,* que serão vistas posteriormente.

Tipos especiais de matrizes.

Matriz nula – é aquela em que $a_{ij} = 0, \quad \forall i, \ \forall j$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriz linha – é toda matriz do tipo $A = (a_{ij})_{1xn}$.

Exemplo: A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Esta matriz tem ordem *1x4*.

Matriz coluna – é toda matriz do tipo $A = (a_{ij})_{mx1}$.

Exemplo: A = $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tem ordem *3x1*.

Obs.: Um escalar (um número real) a_{11} pode ser interpretado como uma matriz de ordem *1x1* (a_{11}).

Matriz quadrada – é toda matriz do tipo $A = (a_{ij})_{nxn}$, isto é, o número de linhas é igual ao número de colunas. Neste caso, dizemos que *A* é uma matriz quadrada de *ordem n* e podemos usar a notação A_n.

Obs.: Numa matriz quadrada, os elementos da forma a_{kk}, $\forall k = 1,2,3...,n$ são chamados de elementos da **diagonal principal**.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ é quadrada de ordem *3*. Os elementos da diagonal principal são *2*, *1* e *5*.

Dizemos também que os elementos *7*, *1* e *4* formam a **diagonal secundária**.

Matriz diagonal – é a matriz quadrada em que os elementos que **não estão** na diagonal principal são nulos.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Matriz escalar – é a matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Matriz identidade – é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal são iguais a 1.

Usamos a notação I_n para indicar a matriz identidade de ordem *n*.

Exemplo:

$$I_1 = (1),\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ldots,\quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz triangular superior – é uma matriz quadrada em que todos os elementos **abaixo** da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, se $i > j$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz triangular inferior – é uma matriz quadrada em que todos os elementos **acima** da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, se $i < j$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Operações com matrizes

1. Igualdade.

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{rxs}$ são iguais se possuem a mesma ordem, isto é, $m = r$ e $n = s$ e $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, \forall j$.

2. Adição.

A soma de duas matrizes **de mesma ordem** $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ é uma outra matriz C de mesma ordem *mxn* que denotamos por $C = A + B$, tal que $C = (c_{ij})_{mxn}$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, \forall j$.

Propriedades da adição:

i) Comutatividade: $A + B = B + A$.

ii) Associatividade: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

iii) Elemento neutro: $A + 0 = 0 + A$, onde 0 representa a matriz nula.

iv) Elemento oposto: Dada a matriz A, existe a matriz oposta de A, que denotaremos por $-A$, tal que $A + (-A) = 0$.

Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, determine $A + B$.

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Multiplicação por um escalar.

Seja $A = (a_{ij})_{mxn}$ e k um escalar. Definimos a matriz kA como sendo a matriz $B = kA$, onde $B = (b_{ij})_{mxn}$, tal que $b_{ij} = ka_{ij}$. Isto é, multiplicamos todos os elementos de A por k.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. A matriz $B = 5A$ é $B = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriedades da multiplicação por escalar:

i) $k(A + B) = kA + kB$.

ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$.

iii) $k_1 \cdot (k_2A) = (k_1 \cdot k_2)A$.

Obs.: $kA = Ak$.

A diferença $A - B$ é a soma de A com a oposta de B, isto é $A + (-B)$.

Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, determine $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

4. Multiplicação de matrizes.

Consideremos a seguinte situação, que irá motivar a definição de multiplicação de matrizes.

Um corretor da bolsa de valores, calculando o patrimônio adquirido no dia por dois clientes, nas quatro primeiras horas do pregão, montou as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 5000 & 2000 & 1800 & 1000 \\ 2000 & 3000 & 800 & 1200 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ em que:}$$

- Cada elemento a_{ij} da matriz A é a quantidade das ações de uma empresa adquiridas pelo cliente i na hora j. Por exemplo, o elemento $a_{23} = 800$ nos diz que foram adquiridas 800 ações pelo cliente 2 na hora 3.
- Cada elemento b_{ij} da matriz B é o preço, em dólares, de cada ação na hora i. Por exemplo, o elemento b_{21} nos diz que na hora 2 o preço de cada ação era de $2{,}5$ dólares.

Quanto investiu cada cliente para adquirir suas ações?

Esse investimento é calculado multiplicando-se o número de ações adquiridas em cada hora pelo preço unitário e somando-se os resultados.

- **Cliente 1:** $5000 \times 2 + 2000 \times 2{,}5 + 1800 \times 3 + 1000 \times 4 = 24400.$
- **Cliente 2:** $2000 \times 2 + 3000 \times 2{,}5 + 800 \times 3 + 1200 \times 4 = 18700.$

A matriz C em que cada elemento c_{ij} é o investimento do cliente i é dada por

$$C = \begin{pmatrix} 24400 \\ 18700 \end{pmatrix}.$$

A matriz C é denominada produto da matriz A pela matriz B, isto é $C = AB$. Ela foi obtida multiplicando-se a primeira linha de A pela coluna de B e a segunda linha de A pela coluna de B.

Observe como isto foi feito:

- $c_{11} = \begin{pmatrix} 5000 & 2000 & 1800 & 1000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5000 \times 2 + 2000 \times 2,5 + 1800 \times 3 + 1000 \times 4 = 24400.$

- $c_{21} = \begin{pmatrix} 2000 & 3000 & 800 & 1200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2000 \times 2 + 3000 \times 2,5 + 800 \times 3 + 1200 \times 4 = 18700.$

De uma maneira geral, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{mxk}$ e $B = (b_{ij})_{kxn}$ o produto da linha i de A pela coluna j de B é igual a

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ik} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \dots \\ b_{kj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

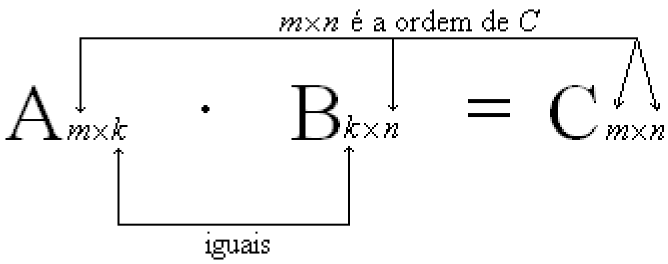
Definição: Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{mxk}$ e $B = (b_{ij})_{kxn}$ o produto da matriz A pela matriz B é a matriz $C = AB$, $C = (c_{ij})_{mxn}$, tal que c_{ij} é igual ao produto da linha i de A pela coluna j de B.

Equivalentemente:

Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{mxk}$ e $B = (b_{ij})_{kxn}$. Definimos a matriz produto $C = AB$ como sendo a matriz de ordem mxn, isto é $C = (c_{ij})_{mxn}$, tal que $c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$.

Atenção!

De acordo com a definição, somente é possível multiplicar matrizes onde **o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda matriz**. O diagrama abaixo auxilia a interpretação.



Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determine o produto AB.

Como A possui ordem $2x2$ e B ordem $2x3$, então o produto é possível e, neste caso, $C = AB$ possui ordem $2x3$. Os elementos da matriz C são:

$c_{11} = (2 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2$. $\quad c_{12} = (2 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$. $\quad c_{13} = (2 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.

$c_{21} = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7$. $\quad c_{22} = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$. $\quad c_{23} = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$.

Logo, a matriz $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Obs.: Perceba que neste exemplo não é possível calcular o produto BA. Isso já nos adianta que a operação de multiplicação entre matrizes **não é comutativa**, necessariamente.

Propriedades da multiplicação de matrizes.

Desde que sejam possíveis os produtos entre as matrizes, são válidas as seguintes propriedades:

i) $A(B \pm C) = AB \pm AC$. (distributiva à esquerda).

ii) $(A \pm B)C = AC \pm BC$. (distributiva à direita).

iii) $(AB)C = A(BC)$. (associativa).

iv) $A \cdot 0 = 0$.

Observações:

1. O produto de matrizes **não é**, necessariamente, comutativo!

Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Podemos verificar rapidamente que $AB \neq BA$, pois $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Em alguns casos as matrizes comutam. Por exemplo, se $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, verifique que $CD = DC$.

2. Indicamos $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, $A^n = \underbrace{AAAA....A}_{\text{n termos}}$.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcule A^2.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Se $AB = 0$ **não** podemos concluir que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. A matriz identidade é o **elemento neutro multiplicativo** nas operações de multiplicações de matrizes.

Se $A = (a_{ij})_{mxn}$, então $I_m.A = A$ e também $A.I_n = A$. Ilustraremos este resultado com um exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$, então $I_3.A = A$ e também $A.I_4 = A$.

$$I_3.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = A.$$

$$A.I_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = A.$$

Transposição de matrizes

Definição: Dada uma matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$, chamamos de transposta da matriz A e indicamos por A^T, a matriz $A^T=\left(a'_{ji}\right)_{nxm}$, tal que $a'_{ji}=a_{ij}$. Em outras palavras, as linhas da matriz transposta são as colunas de *A* e as colunas da matriz transposta são as linhas de *A*.

Exemplo 1: Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, temos que $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2: Dada a matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, temos que $B^T=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Propriedades da matriz transposta.

i) $\left(A^T\right)^T=A$.

ii) $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$.

iii) $\left(k\cdot A\right)^T=k\cdot A^T$.

iv) $\left(AB\right)^T=B^TA^T$.

Demonstrações dos itens ii) e iv):

ii) Considere as matrizes $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$ e $B=\left(b_{ij}\right)_{mxn}$. Seja $C=A+B$, isto é, $C=\left(c_{ij}\right)_{mxn}$, tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Assim, $\left(A+B\right)^T=C^T$. Temos então $C^T=\left(c'_{ji}\right)_{nxm}$, tal que:

$c'_{ji}=c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=a'_{ji}+b'_{ji}$. Daí, $C^T=A^T+B^T$.

Obs.: É verdadeiro também que $\left(A-B\right)^T=A^T-B^T$. Mostre este resultado.

iv) Considere as matrizes $A=\left(a_{ij}\right)_{mxk}$ e $B=\left(b_{ij}\right)_{kxn}$. Seja $C=AB$, isto é, $C=\left(c_{ij}\right)_{mxn}$, tal que $c_{ij}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}\cdot b_{pj}$. Assim, $\left(AB\right)^T=C^T$. Temos então $C^T=\left(c'_{ji}\right)_{nxm}$, tal que:

$c'_{ji}=c_{ij}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}\cdot b_{pj}=\sum_{p=1}^{k}a'_{pi}\cdot b'_{jp}=\sum_{p=1}^{k}b'_{jp}\cdot a'_{pi}$. Daí, $C^T=B^TA^T$.

Definição: Uma matriz quadrada A é dita **simétrica** se ela é igual à sua transposta, isto é, $A = A^T$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = A^T$.

Como conseqüência da definição, em toda matriz simétrica os elementos opostos a diagonal principal são iguais.

Definição: Uma matriz quadrada A é dita **anti-simétrica** se ela é igual à oposta da sua transposta, isto é, $A = -A^T$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -A^T$.

Como conseqüência da definição, em toda matriz anti-simétrica os elementos opostos a diagonal principal são simétricos e a diagonal principal é nula.

Matrizes inversíveis

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma matriz inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. A matriz B é chamada de *inversa* da matriz A e denotada por $B = A^{-1}$.

Obs.: É evidente que a matriz inversa A^{-1}, se existir, deve ser também quadrada de ordem n, pois A^{-1} comuta com A.

Exemplo 1: A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ é inversível e a sua inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I_2 .$$

Exemplo 2: Determine, se possível, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Fazendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$A^{-1}A = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} (8a+5b) & (3a+2b) \\ (8c+5d) & (3c+2d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8a+5b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = -3$$

e

$$\begin{cases} 8c+5d=0 \\ 3c+2d=1 \end{cases} \Rightarrow c = -5 \text{ e } d = 8$$

isto é, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$, pois temos também $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Exercício: Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ não é inversível.

Exemplo 3: Determine, se possível, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Fazendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, resulta:

$$A^{-1}A = I_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (a+2b+4c) & (a+3b+9c) & (a+b+c) \\ (d+2e+4f) & (d+3e+9f) & (d+e+f) \\ (g+2h+4i) & (g+3h+9i) & (g+h+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+2b+4c = 1 \\ a+3b+9c = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3, \; b = 4 \quad \text{e} \quad c = -1$$

e

$$\begin{cases} d+2e+4f = 0 \\ d+3e+9f = 1 \\ d+e+f = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 1, \; e = -3/2 \quad \text{e} \quad f = 1/2$$

e

$$\begin{cases} g+2h+4i = 0 \\ g+3h+9i = 0 \\ g+h+i = 1 \end{cases} \Rightarrow g = 3, \; h = -5/2 \quad \text{e} \quad i = 1/2$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \\ 3 & -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Observação: Do exposto observamos que, para determinar a inversa de uma matriz quadrada de ordem n, temos de encontrar n^2 variáveis, resolvendo n sistemas de n equações a n incógnitas cada um. Isto é bastante trabalhoso! No estudo do escalonamento das matrizes veremos um outro método para obter a inversa.

Teorema: Se $A = (a_{ij})_{nxn}$ é inversível, então **é única** a matriz $B = (b_{ij})_{nxn}$ inversa de A, tal que $AB = BA = I_n$.

Suponha que exista uma matriz $C = (c_{ij})_{nxn}$, tal que $AC = CA = I_n$.

$$C = C \cdot I_n = C \cdot (AB) = (CA) \cdot B = I_n \cdot B = B$$

ou

$C = I_n \cdot C = (BA) \cdot C = B(AC) = B \cdot I_n = B$. Logo, $C = B$.

Propriedades da inversa de uma matriz.

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, então:

i) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

iii) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

Demonstrações:

i) Como A é inversível, então existe $C = A^{-1}$, tal que $CA = AC = I_n$. Daí, A é a inversa de C, isto é $A = C^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1}$.

ii) Para mostrar que $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB, temos:

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)\cdot(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}\cdot A\right)B = B^{-1}(I_n)B = B^{-1}(I_n\cdot B) = B^{-1}\cdot B = I_n.$$

$$(AB)\cdot\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(B\cdot B^{-1}\right)A^{-1} = A(I_n)A^{-1} = (A\cdot I_n)A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I_n.$$

iii) Como A é inversível, temos que $A\cdot A^{-1} = I_n$ e $A^{-1}\cdot A = I_n$.

Usando as propriedades da matriz transposta, obtemos:

$\left(A\cdot A^{-1}\right)^{T} = (I_n)^{T} = I_n$.

$\left(A^{-1}\right)^{T}\cdot A^{T} = I_n$. **(1)**

$\left(A^{-1}\cdot A\right)^{T} = (I_n)^{T} = I_n$.

$(A)^{T}\cdot\left(A^{-1}\right)^{T} = I_n$. **(2)**

De **(1)** e **(2)**, concluímos que $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

Exercício: Sabendo-se que A, B e C são matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, a matriz X na equação $A\cdot X\cdot B^{T} = C^{-1}$ é:

a) $\left(A\cdot C\cdot B^{T}\right)^{-1}$.

b) $\left(B^{T}\cdot A\cdot C\right)^{-1}$.

c) $\left(A\cdot B^{T}\cdot C\right)^{-1}$.

d) $\left(C\cdot B^{T}\cdot A\right)^{-1}$.

e) $\left(B^{T}\cdot C\cdot A\right)^{-1}$.

Determinantes

A teoria dos determinantes teve origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares de equações. Algumas expressões matemáticas complicadas são sintetizadas utilizando-se os determinantes.

Definição: Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos determinante da matriz M (e indicamos por $det(M)$ (**ou** os elementos da matriz entre *barras verticais*) o número real que obtemos operando com os elementos de M da seguinte forma:

1. Se M é de ordem $n = 1$, então $det(M)$ é o único elemento de M.

$$M = (a_{11}) \Rightarrow det(M) = a_{11}.$$

Exemplo: $M = (-6) \Rightarrow det(M) = -6$.

2. Se M é de ordem $n = 2$, então $det(M)$ é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

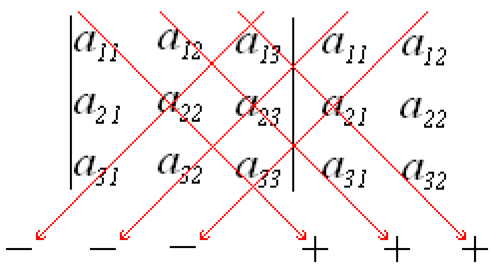
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow det(M) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}.$$

Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det(M) = (3).(4) - (-6).(-2) = 0$.

3. Se M é de ordem $n = 3$, então $det(M)$ é definido por:

$$det(M) = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}.$$

Na prática, utilizamos a **Regra de Sarrus**:



Exemplo: Calcule $det(A)$, sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$det(A) = (0)(3)(5) + (1)(4)(2) + (-2)(-1)(1) - (-2)(3)(2) - (0)(4)(1) - (1)(-1)(5) = 27.$$

4. Se M é de ordem $n > 3$, então calcularemos o determinante de M usando o ***Teorema de Laplace***. Veremos as definições preliminares de *menor complementar* e *cofator* que serão utilizados no citado teorema.

Menor complementar.

Definição: Considere M uma matriz quadrada de ordem n e seja a_{ij} um elemento de M. Definimos o *menor complementar* do elemento a_{ij}, e indicamos D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de M.

Exemplo. Seja $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determine D_{12} e D_{31}.

$D_{12} = det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -11$ e $D_{31} = det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 11$

Cofator.

Definição: Considere M uma matriz quadrada de ordem n e seja a_{ij} um elemento de M. Definimos o *cofator* do elemento a_{ij}, e indicamos A_{ij}, como sendo o número $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$.

Exemplo: Na matriz M dada anteriormente, calcule A_{12} e A_{31}.

$A_{12} = (-1)^{1+2}.D_{12} = (-1).(-11) = 11$.

$A_{31} = (-1)^{3+1}.D_{31} = (1).(11) = 11$.

Teorema de Laplace.

O determinante de uma matriz M, de ordem n, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos respectivos cofatores, isto é,

$det(M) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj}$ (desenvolvimento pela *coluna j*)

ou

$det(M) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik}$ (desenvolvimento pela *linha i*)

Observação: É melhor escolher uma fila da matriz que possua a <u>maior quantidade de zeros</u> com a finalidade de simplificar os cálculos do determinante.

Exemplo: Seja $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule *det*(*M*).

Calcularemos este determinante expandindo a coluna $j = 1$, pois esta possui uma maior quantidade de zeros.

$$\det(M) = \sum_{k=1}^{4} a_{k1}.A_{k1} = a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + a_{31}.A_{31} + a_{41}.A_{41} =$$

$$= 3.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{4+1}.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3.(6 + 48 - 4 + 12) = 3.(62) = 186 .$$

Caso escolhêssemos uma outra fila para calcular o determinante chegaríamos a esta mesma resposta, obviamente com uma quantidade maior de cálculos.

Exercício: Seja $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Mostre que $\det(B) = -32$.

Principais propriedades dos determinantes.

Sejam *A* e *B* matrizes quadradas de ordem *n*. Então:

a) $det(A) = det(A^T)$.

b) Se a matriz A possui fila nula, então $det(A) = 0$.

c) $det(\lambda A) = \lambda^n \, det(A)$.

d) Se a matriz A é triangular (superior ou inferior), então $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$, isto é, o *det*(*A*) é o produto dos elementos da diagonal principal.

e) $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

Como conseqüência deste último item, temos que $det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{det(A)}$, se $\det(A)\neq 0$.

De fato, se existe A^{-1}, então:

$$A\cdot A^{-1}=I_n \quad\Rightarrow\quad \det\left(A\cdot A^{-1}\right)=\det(I_n) \quad\Rightarrow\quad \det(A)\cdot\det\left(A^{-1}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad \det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}.$$

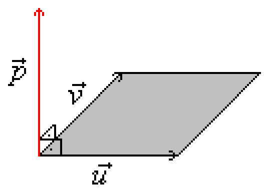
Teorema: Uma matriz A é inversível se, e somente se, $det(A)\neq 0$.

***

Os determinantes aparecem em diversas situações na matemática. No cálculo do produto vetorial, no cálculo de áreas, volumes, equações de retas, planos, parábolas, etc. Vejamos algumas situações:

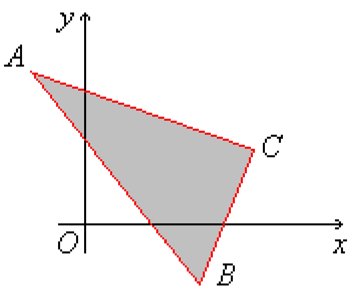
- **Produto vetorial.**

Se $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ e $\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ são vetores não paralelos do espaço, então $\vec{p}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$ é ortogonal ao plano determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tem sentido dado pela "regra da mão direita".



- **Cálculo de áreas.**

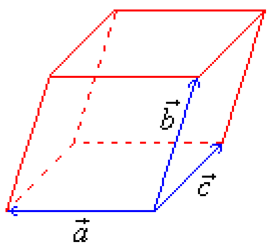
Ainda na figura anterior, temos que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pelo valor absoluto do produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$. Um outro caso interessante é o valos da área S de um triângulo de vértices $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ e $C(x_3,y_3)$.



$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{pmatrix}\right|$$

Cálculo de volumes.

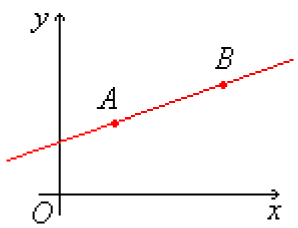
Se $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ e $\vec{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ são vetores não coplanares do espaço, então o paralelepípedo determinado por eles tem volume V dado pelo módulo do produto misto $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.



$$V = |(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})|$$

Equação da reta.

Se $A(x_1,\ y_1)$ e $B(x_2,\ y_2)$ são dois pontos distintos no plano, então existe uma única reta de equação geral $ax + by + c = 0$ que passa por estes dois pontos.



A reta é obtida calculando-se a equação com determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Verifique que $\begin{cases} a = y_1 - y_2 \\ b = x_2 - x_1 \\ c = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases}$.

Sistemas lineares

Equação linear

Dados os números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ e β ($n \geq 1$), a equação $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n = \beta$, onde os X_i são variáveis (incógnitas) em $\Re$, damos o nome de *equação linear sobre* $\Re$.

Exemplo:

A equação $2x - y + 5z + w = 1$ é uma equação linear, enquanto que $x - y + z^2 + \sqrt{w} = 5$ não é uma equação linear. Nestes exemplos as variáveis x, y, z e w substituem X_1, X_2, X_3 e X_4, respectivamente.

Solução de uma equação linear

Uma solução de uma equação linear $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n = \beta$ é uma seqüência de n números reais $(c_1, c_2, ..., c_n)$ que satisfaz a equação, isto é, $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + ... + \alpha_n c_n = \beta$ é uma sentença verdadeira.

Exemplo:

A seqüência $(1,\ 2,\ -1,\ 6)$ é uma solução da equação linear $2x - y + 5z + w = 1$, pois $2(1) - (2) + 5(-1) + (6) = 1$ é uma sentença verdadeira.

Encontre uma outra solução para esta equação.

Sistema linear

Um sistema linear de ordem ***mxn*** (m, $n \geq 1$ inteiros), é um conjunto com ***m equações*** lineares e cada equação com ***n incógnitas***.

Modo que se apresenta um sistema linear:

$$S : \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = \beta_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n = \beta_2 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = \beta_m \end{cases}$$

X_i, $\forall i = 1,2,...,n$ são as variáveis reais;

β_i, $\forall i = 1,2,...,m$ são os termos independentes;

a_{ij}, $\forall i, j$ são os coeficientes reais.

Exemplo: $S : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ é um sistema linear de ordem $2x3$, isto é, com 2 equações e 3 incógnitas.

Solução de um sistema linear

Uma solução de um sistema linear é uma seqüência de números reais $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ que é solução de **todas** as equações do sistema.

Exemplo: A seqüência $(x, y, z) = (0,3,4)$ é uma solução do sistema $S: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$. Encontre outra!

Sistema homogêneo

Se os termos independentes de um sistema linear forem **todos nulos** este sistema será chamado de homogêneo. Um sistema homogêneo tem sempre a solução trivial nula $(0,0,...,0)$.

Exemplo: O sistema $A: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$ é homogêneo. Uma solução para este sistema é $(0,0,0)$.

Existem outras soluções para este sistema? Tente encontrar!

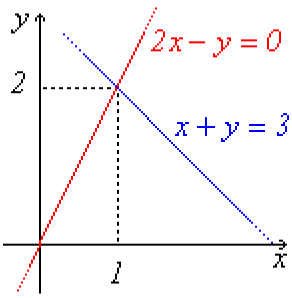
Classificação de um sistema linear

De acordo com o número de soluções, um sistema linear é classificado como:

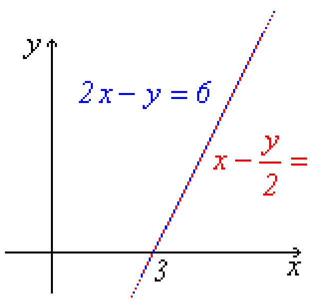
- **Sistema impossível** (**SI**): O sistema não admite solução.
- **Sistema possível determinado** (**SPD**): O sistema admite solução única.
- **Sistema possível indeterminado** (**SPI**): O sistema admite infinitas soluções.

Exemplo: Resolva os sistemas lineares abaixo em $\Re^2$ e interprete geometricamente as soluções.

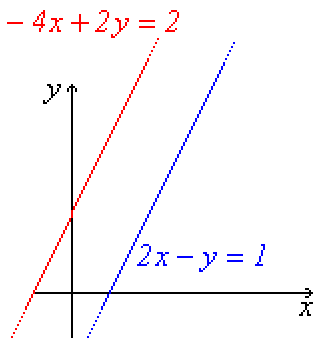
$A: \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ $\quad B: \begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ $\quad C: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$



Retas concorrentes.



Retas coincidentes.



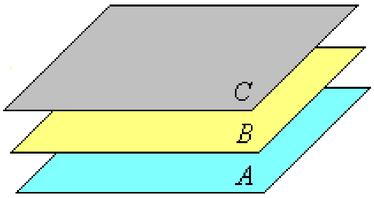
Retas paralelas.

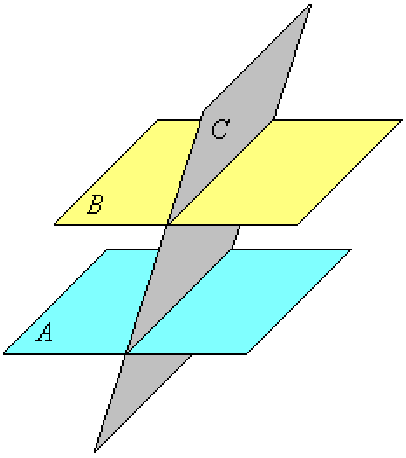
Interpretação geométrica dos sistemas lineares de ordem *3x3*

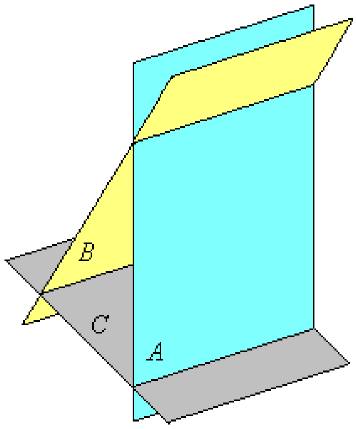
As equações que compõe o sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ representam graficamente planos no $\Re^3$.

A depender da classificação do sistema, estes planos podem assumir algumas posições relativas:

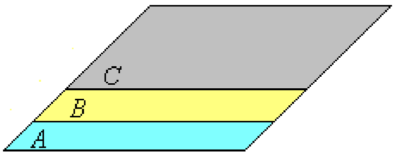
- **Sistema impossível (SI):**

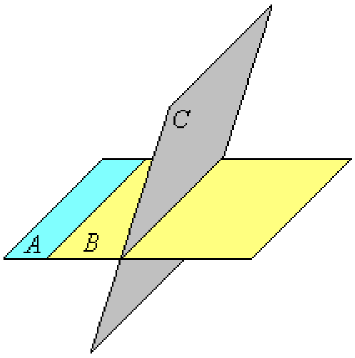


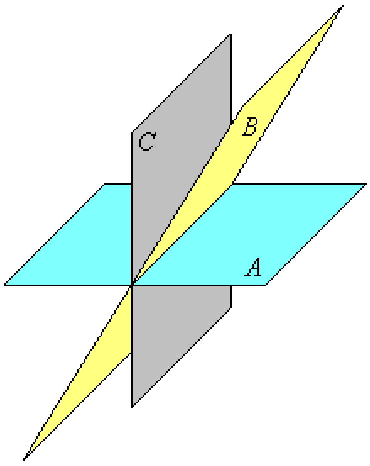




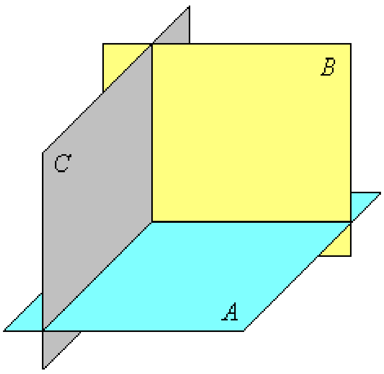
- **Sistema possível indeterminado (SPI):**







- **Sistema possível determinado (SPD):**



Forma matricial de um sistema linear

Vamos agora associar uma forma matricial a um sistema linear. Poderemos resolver sistemas lineares de forma sistematizada com o uso das operações elementares e o escalonamento de matrizes, como veremos adiante.

Considere o sistema linear S abaixo:

$$S:\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = \beta_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = \beta_2 \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = \beta_m \end{cases}$$

Podemos associar a este sistema uma forma matricial $A \cdot X = B$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$ é chamada de **matriz dos coeficientes**;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix}_{nx1}$$ é chamada de **matriz das variáveis**;

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{mx1}$$ é chamada de **matriz dos termos independentes**.

Exemplo: A forma matricial do sistema $F:\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz ampliada de um sistema linear

A matriz ampliada de um sistema linear $S:\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = \beta_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = \beta_2 \\ \cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = \beta_m \end{cases}$ é definida por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, a matriz ampliada do sistema $F:\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observação: Ao nos referirmos a linha $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ da matriz ampliada, estaremos indiretamente nos referindo a equação $x + y - z = 0$ do sistema *F*. Isto vale de uma forma geral.

Operações elementares e escalonamento

Seja S um sistema linear com m equações e n incógnitas:

Matriz ampliada de S:

$$S:\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = \beta_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = \beta_2 \\ \ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = \beta_m \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

As seguintes operações são chamadas **operações elementares** sobre as linhas (equações) de uma matriz (sistema):

1) Trocar de posição (permutar) duas linhas de S (simbolicamente $L_i \leftrightarrow L_j$);

2) Trocar uma linha de S por ela mesma multiplicada por um número real $\lambda \neq 0$ (simbolicamente $L_i \leftrightarrow \lambda L_i$);

3) Trocar uma linha de S por ela mesma somada com uma outra linha de S previamente multiplicada por um número real $\lambda \neq 0$ (simbolicamente $L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_j$);

Se um sistema linear S_1 foi obtido de um sistema linear S através de um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é *equivalente* à S.

Notação: $S_1 \sim S$.

Teorema: As operações elementares não alteram o conjunto solução de um sistema linear, isto é, sistemas equivalentes possuem o mesmo conjunto solução.

Este mecanismo (uso das operações elementares) é extremamente útil para resolver um sistema linear. Devemos encontrar um sistema equivalente à S que seja mais simples.

Vamos ver um exemplo...

Exemplo: Resolva o sistema linear $S:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+2z=0 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$.

Devemos trabalhar com a matriz ampliada do sistema e aplicar a ela uma série de operações elementares **adequadas**. O objetivo é aumentar o número de coeficientes iniciais nulos a cada linha (a partir da segunda) em relação à linha precedente. Este procedimento é chamado de **escalonamento** de matriz.

$$\begin{array}{ccccc} S & & S_1 & & S_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \sim & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} & \sim & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$ $\qquad$ $L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2$

$L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1$

Desta forma, o sistema original S é equivalente ao sistema S_2 da última etapa do escalonamento. Podemos observar que o sistema S_2 tem um formato mais simples do que *S*.

$$S:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+2z=0 \\ 3x-y+z=1 \end{cases} \quad \sim \quad S_2:\begin{cases} x-y+z=1 \\ \quad y+0z=-2 \\ \quad\; -2z=2 \end{cases}.$$

Resolvemos o sistema S_2 começando pela última equação até a primeira. Desta forma, encontramos a solução que é a mesma do sistema proposto *S*. Este método é chamado de ***eliminação de Gauss*** (*ou eliminação Gaussiana*).

$-2z=2 \Rightarrow z=-1$.

$y+0z=-2 \Rightarrow y+0(-1)=-2 \Rightarrow y=-2$.

$x-y+z=1 \Rightarrow x-(-2)+(-1)=1 \Rightarrow x=0$.

A solução do sistema S_2 é $(x,y,z)=(0,-2,-1)$. Esta também é a solução do sistema *S*. Verifique!

Matrizes escalonadas

Definição: Uma matriz M está na forma escalonada (ou escada) se o número de zeros que precede o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem apenas linhas nulas, se houverem.

Exemplos de matrizes escalonadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplos de matrizes não escalonadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema: Todo sistema linear (matriz) é *equivalente* a um sistema (matriz) escalonado.

***

Curiosidade A palavra escalonar vem da palavra latina *scala*, que significa "escada" ou "degrau". Escalonar uma matriz significa dar a ela a forma de escada.

Discussão e solução de um sistema linear

Discutir um sistema linear significa classificá-lo em *sistema impossível* (S.I), *sistema possível determinado* (S.P.D) ou *sistema possível indeterminado* (S.P.I).

Suponha que um sistema S (com m equações e n variáveis originalmente) **tenha sido escalonado** e, **retiradas** as equações (linhas) do tipo $0 = 0$, restam p equações ($p \leq m$) com n variáveis.

I. Se a última das equações restantes é $0X_1 + 0X_2 + \ldots + 0X_n = \beta_p$, $(\beta_p \neq 0)$, então o sistema é impossível (S.I).

Por exemplo, o sistema $S: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 0x + y - z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases}$, cuja matriz ampliada é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, é claramente impossível.

Caso contrário, sobram duas alternativas:

II. Se $p = n$ (número de **equações** é **igual** ao número de **variáveis**) o sistema é possível determinado (S.P.D).

Por exemplo, o sistema $S: \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 0x + y - z = 1 \\ 0x + 0y + 2z = 6 \end{cases}$, cuja matriz ampliada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, possui única solução. Usando, neste caso, a eliminação Gaussiana, obtemos $(x, y, z) = (1,4,3)$.

III. Se $p < n$ (número de **equações** é **menor** que o número de **variáveis**) o sistema é possível indeterminado (S.P.I).

Por exemplo, o sistema $S: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 0x + 0y + 2z = 8 \end{cases}$, cuja matriz ampliada é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, possui infinitas soluções da forma $(x,\ x+2,\ 4)$, $x \in \Re$. Assim, podemos apresentar o conjunto solução como $S = \{(x,\ x+2,\ 4) \in \Re^3\ /\ x \in \Re\}$.

Observação: O valor $n - p$ é chamado de ***grau de liberdade*** (ou ***número de variáveis livres***) do sistema, isto significa dizer que a solução do sistema é apresentada com $n - p$ variáveis. Neste último exemplo o grau de liberdade é 1.

Exercícios: Resolva os sistemas abaixo por escalonamento e classifique-os.

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x - y - 2z = -5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \\ 2y - 2z = 1 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x - y - z + 2w = 1 \\ 2x - 2y - z + 3w = 3 \\ -x + y - z = -3 \end{cases}$.

Espaço reservado para resolução.

Respostas:

a) S.P.D.: $(x, y, z) = (0,1,2)$. b) S.I. c) S.P.I.: $(2 + y - w,\ y,\ 1 + w,\ w)$, y e $w \in \Re$.

Exercício: Discuta em função de k o sistema $S : \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$, isto é, determine os valores de $k \in \Re$ de modo que o sistema seja classificado como SI, SPI ou SPD, se possível.

Espaço reservado para resolução.

Matrizes inversíveis

Vamos agora apresentar um algoritmo para determinação da inversa de uma matriz usando escalonamento.

Teorema: Uma matriz A de ordem n é inversível se, e somente se, A é equivalente a matriz identidade ($A \sim I_n$). Neste caso, as mesmas sucessões de operações elementares que transformam A em I_n, transformam I_n em A^{-1}.

Em símbolos: $(A \vdots I_n) \sim$ ... operações elementares ... $\sim (I_n \vdots A^{-1})$.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Ache, se possível, A^{-1}.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$ ... operações elementares ... $\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/8 & -1/4 \end{array}\right)$. Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 3/8 & -1/4 \end{pmatrix}$.

Exercício: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ache, se possível, A^{-1}.

Espaço reservado para resolução.

Regra de Cramer

Utilizando a teoria dos determinantes podemos resolver um sistema linear **quadrado** cuja matriz dos coeficientes possui determinante **não nulo**.

Considere $AX = B$ a forma matricial de um sistema linear quadrado de ordem *n*, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Se ***det*(*A*) ≠ *0*,** então a solução do sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \beta_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det(A)}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \beta_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \beta_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det(A)}, \ \dots, \ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \beta_n \end{vmatrix}}{det(A)}.$$

Exemplo: Usando a regra de *Cramer*, resolva o sistema abaixo.

$$S: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Espaço reservado para resolução.

Resposta: $(x, y, z) = (1/4, 1/8, 3/8)$.

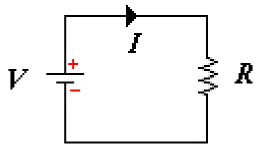
Aplicação: Circuitos elétricos simples e leis de Kirchhoff

O fluxo de corrente em um circuito elétrico simples (fontes e resistências) pode ser descrito por um sistema linear de equações. Quando uma corrente passa por uma resistência (lâmpada, motor, etc.) parte da voltagem é consumida. Pela lei de Ohm essa "queda de voltagem" na resistência é dada por $V = RI$, onde:

V é a voltagem. Unidade volts (V);

R é a resistência . Unidade Ohms (Ω);

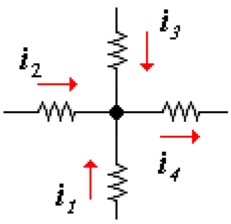
I é a corrente. Unidade ampères (A).



$$\boxed{V = R.I}$$

Lei de Kirchhoff para corrente:

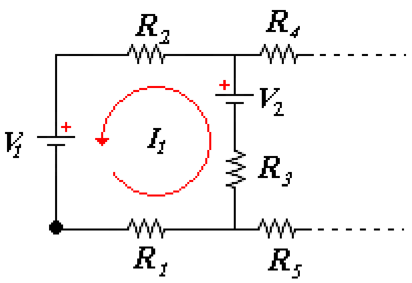
Em cada nó a soma das correntes que entram é igual à soma das correntes que saem.



$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4$$

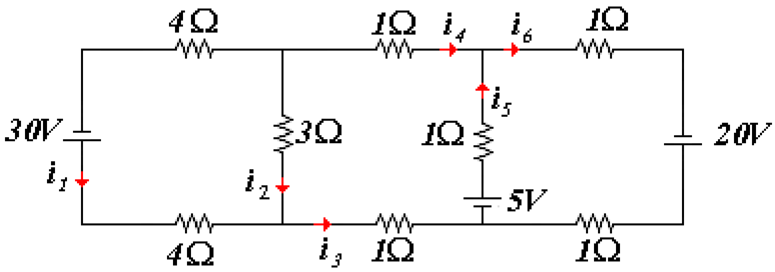
Lei de Kirchhoff para voltagem:

Em cada caminho (malha ou ramo) fechado, a soma das voltagens é zero.



$$\boxed{I_1.R_1 + I_1.R_3 - V_2 + I_1.R_2 + V_1 = 0}$$

Exemplo: Determine as correntes indicadas no circuito abaixo:

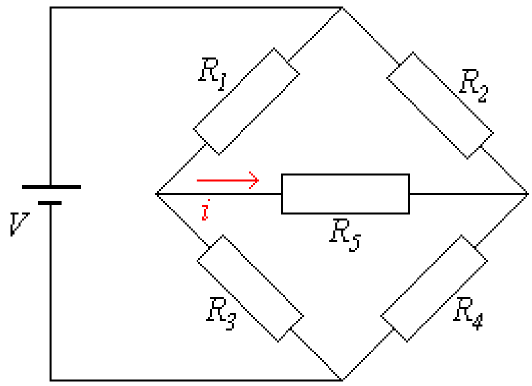


Espaço reservado para resolução.

Solução: $i_1 = 3A,\ \ i_2 = -2A,\ \ i_3 = 1A,\ \ i_4 = -1A,\ \ i_5 = 9A,\ \ i_6 = 8A$.

Ponte de Wheatstone

Mostre que se a corrente ***i*** no circuito da figura dada é **zero**, então $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$.



Este circuito, chamado de ***Ponte de Wheatstone***, é usado para *medições precisas de resistência*. Aqui, ***R₄*** **é uma resistência desconhecida** e R_1, R_2 e R_3 são resistores ajustáveis (potenciômetros). R_5 representa um galvanômetro (aparelho que mede corrente). Depois de variar as resistências R_1, R_2 e R_3, até que a leitura do galvanômetro acuse **zero**, a fórmula $R_4 = \dfrac{R_2 R_3}{R_1}$ determina a resistência desconhecida R_4.

Resolva este problema usando *sistemas lineares*.

Espaço reservado para resolução.

Construindo curvas e superfícies por pontos especificados (usando determinantes)

Nesta texto descrevemos uma técnica que utiliza determinantes para construir retas, círculos e seções cônicas em geral por pontos especificados no plano. 0 procedimento também é utilizado para fazer passar planos e esferas no espaço tridimensional por pontos fixados.

Pré-requisitos:

- Geometria Analítica;
- Determinantes;
- Sistemas lineares.

Teorema: *Um sistema linear homogêneo com o mesmo número de equações e de variáveis tem uma solução não trivial (solução não nula) se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes é zero.*

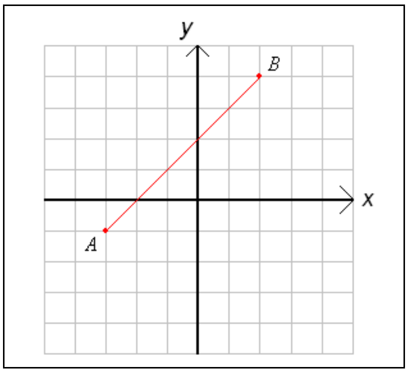
Este resultado pode ser usado para determinar as equações de várias curvas e superfícies por pontos especificados.

Uma reta por dois pontos

Suponha que $A=(x_1,\ y_1)$ e $B=(x_2,\ y_2)$ são dois pontos distintos no plano. Da *Geometria Analítica* sabemos que existe uma única reta de equação

$$ax+by+c=0 \qquad (1)$$

que passa por estes dois pontos.



Observe que a, b e c *não são todos nulos* e que estes coeficientes são únicos para cada reta, a menos de uma constante multiplicativa. Como os pontos A e B estão sobre a reta, substituindo-os em (1) obtemos as duas equações

$$ax_1+by_1+c=0 \qquad (2)$$

$$ax_2+by_2+c=0 \qquad (3)$$

Estas três equações, (1), (2) e (3), podem ser agrupadas e reescritas como:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \end{cases}$$

que é um sistema linear homogêneo com três equações e três variáveis a, b e c. Como a, b e c não são todos nulos, este sistema tem uma solução não trivial, de modo que o determinante da matriz dos coeficientes é igual a zero. Ou seja,

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0 . \qquad (4)$$

Conseqüentemente, cada ponto $(x,\ y)$ da reta satisfaz (4). Reciprocamente, pode ser mostrado que cada ponto $(x,\ y)$ que satisfaz (4) está na reta.

Exemplo 1: Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $A = (2,\ 1)$ e $B = (3,\ 7)$.

Solução.

Substituindo as coordenadas dos dois pontos na equação (4), obtemos

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

O desenvolvimento deste determinante em *cofatores* ao longo da primeira linha nos dá a equação da reta:

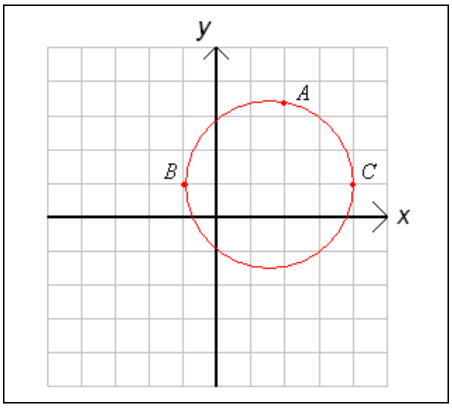
$$-6x + y + 11 = 0 .$$

Um círculo por três pontos

Suponha que $A = (x_1,\ y_1)$, $B = (x_2,\ y_2)$ e $C = (x_3,\ y_3)$ são três pontos distintos *não colineares* do plano. Da *Geometria Analítica* sabemos que existe um único círculo, digamos

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \qquad (5)$$

que passa por estes três pontos.



Substituindo as coordenadas destes pontos nesta equação, obtemos

$$a(x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}) + bx_1 + cy_1 + d = 0 \qquad (6)$$

$$a(x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}) + bx_2 + cy_2 + d = 0 \qquad (7)$$

$$a(x_3^{\ 2} + y_3^{\ 2}) + bx_3 + cy_3 + d = 0 \qquad (8)$$

Como antes, as equações de (5) a (8) formam um sistema linear homogêneo com 4 equações e 4 variáveis a, b, c e d, que possui solução não trivial. Assim, o determinante da matriz dos coeficientes é zero:

$$\det\begin{pmatrix} ((x)^2 + (y)^2) & x & y & 1 \\ ((x_1)^2 + (y_1)^2) & x_1 & y_1 & 1 \\ ((x_2)^2 + (y_2)^2) & x_2 & y_2 & 1 \\ ((x_3)^2 + (y_3)^2) & x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0 . \qquad (9)$$

Esta é a equação do círculo em forma de determinante.

Exemplo 2: Encontre a equação do círculo que passa pelos pontos $A=(1,\ 7)$, $B=(6,\ 2)$ e $C(4,\ 6)$.

Solução.

Substituindo as coordenadas dos três pontos na equação (9), obtemos

$$det\begin{pmatrix} (x^2+y^2) & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}=0\,.$$

que se reduz a $10(x^2+y^2)-20x-40y-200=0$.
A forma padrão desta equação é

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5^2\,.$$

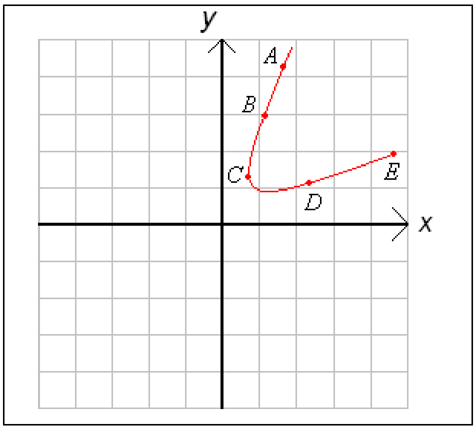
Assim, o círculo tem centro $(1,\ 2)$ e raio igual a 5.

Uma cônica arbitrária por cinco pontos

A equação geral de uma seção cônica arbitrária no plano (uma *parábola*, *elipse* ou *hipérbole*, ou formas degeneradas destas) é dada por

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\,.$$

Esta equação contém seis coeficientes, mas podemos reduzir este número para cinco se dividirmos todos por um que não seja igual a zero. Assim, basta determinar cinco coeficientes e portanto cinco pontos distintos do plano $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$, $D(x_4,\ y_4)$ e $E(x_5,\ y_5)$ são suficientes para determinar a equação da seção cônica.



Como antes, a equação pode ser posta na forma de determinantes:

$$det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ (x_1)^2 & x_1y_1 & (y_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ (x_2)^2 & x_2y_2 & (y_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (x_3)^2 & x_3y_3 & (y_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ (x_4)^2 & x_4y_4 & (y_4)^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ (x_5)^2 & x_5y_5 & (y_5)^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}=0\,. \quad (10)$$

Exemplo 3. A equação de uma órbita

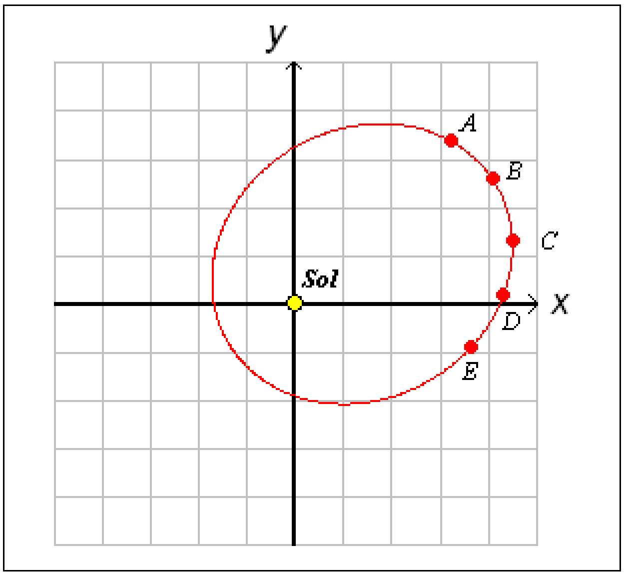
Um astrônomo que deseja determinar a órbita de um asteróide em torno do Sol coloca um sistema de coordenadas cartesianas no plano da órbita, com o Sol na origem. Ao longo dos eixos são usadas unidades astronômicas (1 UA = 1 Unidade Astronômica = distância média da Terra ao Sol = 149.504.200 Km). Pela primeira lei de Kepler, a órbita deve ser uma elipse, de modo que o astrônomo faz cinco observações do asteróide em cinco tempos distintos. Os cinco pontos ao longo da órbita são:

$$A(8{,}025;\ 8{,}310),\ B(10{,}170;\ 6{,}355),\ C(11{,}202;\ 3{,}212),\ D(10{,}736;\ 0{,}375)\ \text{e}\ E(9{,}092;\ -2{,}267).$$

Usando um recurso computacional para resolver a equação (10) com os cinco pontos dados, mostre que a órbita procurada é a elipse de equação:

$$(386{,}799)x^2 - (102{,}896)xy + (446{,}026)y^2 - (2.476{,}409)x - (1.427{,}971)y - 17.109{,}378 = 0\,.$$

O diagrama abaixo dá a trajetória precisa da órbita, junto com os cinco pontos dados.

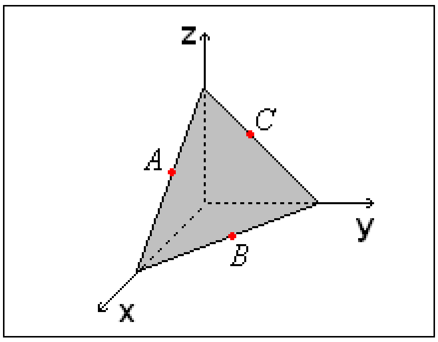


Um plano por três pontos

Suponha que $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ e $C = (x_3,\ y_3,\ z_3)$ são três pontos distintos *não colineares* do espaço. Da *Geometria Analítica* sabemos que existe um único plano, digamos

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (11)$$

que passa por estes três pontos.



De forma semelhante aos outros casos, a equação do plano pode ser posta na forma de determinantes como:

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (12)$$

Exemplo 4: Encontre a equação do plano que passa pelos pontos $A=(1,\ 1,\ 0)$, $B=(2,\ 0,\ -1)$ e $C(2,\ 9,\ 2)$.

Solução.

Substituindo as coordenadas dos três pontos na equação (12), obtemos

$$det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}=0\ .$$

O desenvolvimento deste determinante se reduz a $2x-y+3z-1=0$, que é a equação do plano procurada.

Uma esfera por quatro pontos

Exemplo 5: Da *Geometria Analítica* sabemos que uma esfera no espaço tridimensional que passa por quatro pontos *não coplanares* $A=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C=(x_3,\ y_3,\ z_3)$ e $D=(x_4,\ y_4,\ z_4)$ tem equação dada por

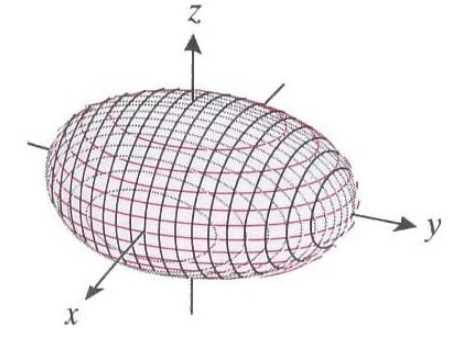
$$a(x^2+y^2+z^2)+bx+cy+dz+e=0 \qquad (13)$$

Encontre a equação da esfera em forma de determinante e mostre, usando um recurso computacional, que a esfera que passa pelos quatro pontos $A=(0,\ 3,\ 2)$, $B=(1,\ -1,\ 1)$, $C=(2,\ 1,\ 0)$ e $D=(5,\ 1,\ 3)$ tem as coordenadas do centro dadas por $(2,\ 1,\ 3)$ e raio igual a 3, isto é, a sua equação padrão é dada por $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$.

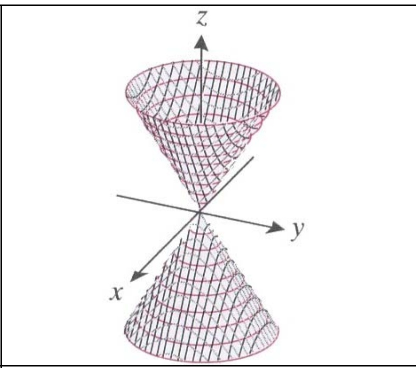
Superfícies quádricas

A equação geral de uma superfície quádrica (*elipsóide, cone elíptico, hiperbolóide de uma folha, parabolóide elíptico, hiperbolóide de duas folhas, parabolóide hiperbólico* ou formas degeneradas destas) é dada por:

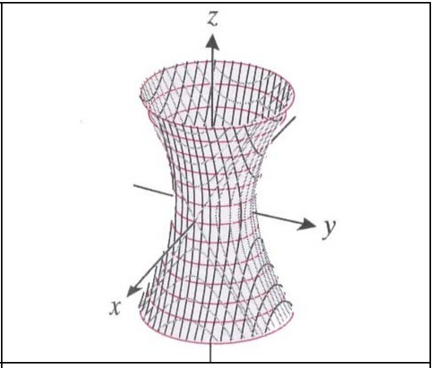
$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}=0\ . \qquad (14)$$



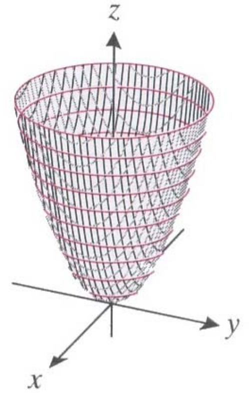
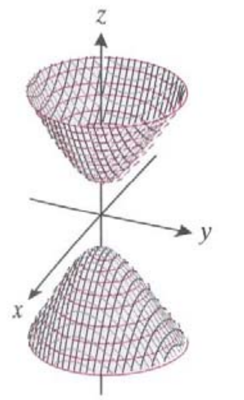
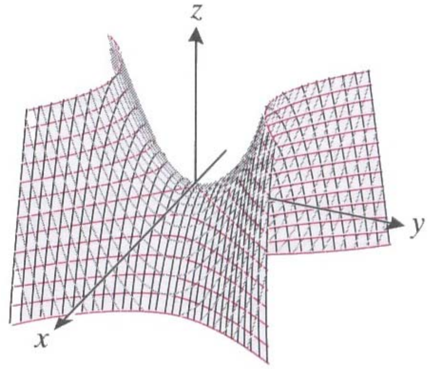
Elipsóide



Cone elíptico



Hiperbolóide de uma folha

		
Parabolóide elíptico	*Hiperbolóide de duas folhas*	*Parabolóide hiperbólico*

A equação (14) contém dez coeficientes, mas podemos reduzir este número para nove se dividirmos todos por um que não seja igual a zero. Dados então nove pontos $P_i = (x_i,\ y_i,\ z_i), \forall i = 1,2,...,9$, sobre uma superfície desta, é possível determinar, de modo único, a sua equação em forma de determinante como

$$det\begin{pmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & xy & xz & yz & x & y & z & 1 \\ (x_1)^2 & (y_1)^2 & (z_1)^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ (x_2)^2 & (y_2)^2 & (z_2)^2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ (x_3)^2 & (y_3)^2 & (z_3)^2 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ (x_4)^2 & (y_4)^2 & (z_4)^2 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ (x_5)^2 & (y_5)^2 & (z_5)^2 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ (x_6)^2 & (y_6)^2 & (z_6)^2 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \\ (x_7)^2 & (y_7)^2 & (z_7)^2 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \\ (x_8)^2 & (y_8)^2 & (z_8)^2 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 \\ (x_9)^2 & (y_9)^2 & (z_9)^2 & x_9y_9 & x_9z_9 & y_9z_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{pmatrix} = 0\ .$$

Exemplo 6: Encontre a equação da quádrica em forma de determinante e calcule a sua equação geral, sabendo-se que ela passa pelos nove pontos $(1,\ 2,\ 3), (2,\ 1,\ 7), (0,\ 4,\ 6), (3,\ -1,\ 4)$, $(3,\ 0,\ 11), (-1,\ 5,\ 8), (9,\ -8,\ 3), (4,\ 5,\ 3)$ e $(-2,\ 6,\ 10)$. Identifique a superfície traçando o seu gráfico.

Observação: Use um ***recurso computacional*** para calcular o determinante e obter a equação geral, além de traçar o gráfico da superfície.

EXERCÍCIOS GERAIS

1. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determine, se possível, a matriz X na equação matricial $A^T \cdot X^{-1} = B^{-1}$.

2. Sabe-se que $2x - 3y = 7$ e que o valor do determinante da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & 2 & y \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é igual a 15.

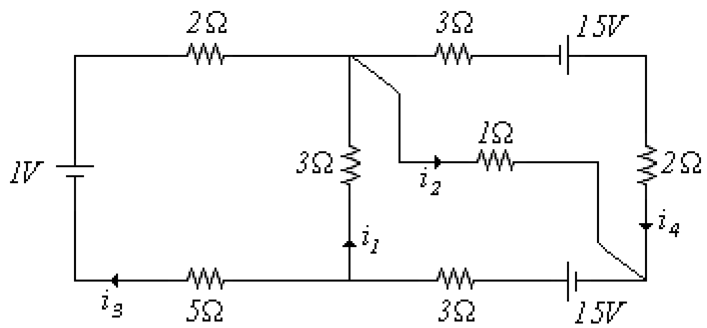
Determine o valor de x e y.

3. Resolva por escalonamento e classifique o sistema $\begin{cases} a - b + c + d = 2 \\ a + b - c + d = -4 \\ a + b + c - d = 4 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$.

4. Considere $\begin{bmatrix} 0 & (k^2 - 3k + 2) & 0 & (2 - 2k) \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & (3 - k) & 2 \end{bmatrix}$ a matriz ampliada de um sistema linear. Determine o valor de $k \in \Re$ de modo que o sistema seja:

a) S.I.
b) S.P.D.
c) S.P.I.

5. Determine as correntes i_1, i_2, i_3 e i_4 no circuito abaixo:



6) Determine a matriz *simétrica* de *determinante igual a 8* que *comuta* com a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Respostas

1) $X = B \cdot A^T$ e $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2) $x = 5$ e $y = 1$.

3) SPD: $(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ -1,\ 2,\ -2)$.

4) a) SI : $k = 2$ ou $k = 3$.

b) SPD: $k \neq 1,\ k \neq 2$ e $k \neq 3$.

c) SPI: $k = 1$.

5) $(i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4) = (2,\ 0,\ 1,\ 3)$.

6) Todas as matrizes que comutam com A são da forma $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, $\forall x, y, z \in \Re$.

Como $\det(A) = 8$, então $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$. Como ela deve ser simétrica, então $y = z = 0$, assim a matriz procurada é: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Referências Bibliográficas:

Álgebra Linear – *Steinbruch* / *Winterle.*
Álgebra Linear e aplicações – *Callioli / Hygino / Roberto.*
Álgebra Linear com Aplicações – *Anton* / *Rorres.*
Álgebra Linear – *Poole.*
Fundamentos de matemática elementar – *Iezzi / Hazzan.*