Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática
Matemática I (MAT013 / T01)
Segunda Avaliação da Aprendizagem

Professor: *Adriano Cattai*
Semestre: 2015.1 – 22/05/2015

Aluno(a): Matrícula:

Instruções:

1. A interpretação faz parte da avaliação;
2. Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;
3. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;
4. Utilize caneta **preta** ou **azul**;
5. Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;
6. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
7. Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
8. Nesta folha, escreva apenas seu nome.

"O saber a gente aprende com os mestes e com os livros. A sabedoria, se aprende é com a vida e com os humildes" (Cora Coralina)

Questão 1 (2,0). Determine os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[4]{6x+4}-2}{2-x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$;

Questão 2 (1,0+0,9). Considere a função $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -2 \\ 2, & x \in \{-2, 2\} \\ x^2-4, & -2 < x < 2 \\ -x+2. & x > 2 \end{cases}$. Esboce o gráfico de f para:

(a) Determinar limites laterais de f nos pontos $x = -2$, $x = 0$ e em $x = 2$;

(b) Verificar se f é contínua nos pontos do item (a).

Questão 3 (1,5). Com o uso da definição de derivada, mostre que $\left[\dfrac{1}{x}\right]' = \dfrac{-1}{x^2}$.

Questão 4 (3,0). Determine a derivada de cada função abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{(x^2+1)^5}$; (b) $g(x) = x^3 \cdot 3^x \cdot \operatorname{sen}(x)$; (c) $h(x) = \sqrt[4]{2x^4-8x+\pi} - e^{1-x-x^2}$.

Questão 5 (1,6). Julgue, cada afirmativa, em verdadeiro ou falso:

(a) Se $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x^3}{3}$ e $x_p = 1$, então $a_n = \dfrac{1}{2}$, em que a_n é a inclinação da reta normal a f no ponto P;

(b) A função $f(x) = \dfrac{x^4+2x+2}{x^2+2x+2}$ não possui assíntota vertical.

Boa Prova!

$\sum\limits_{R=1}^{5} R$ = **R**epense + **R**ecuse + **R**eduza + **R**eutilize + **R**ecicle.

Resolução / Dicas de Resolução

Questão 1.

(a) Como $\sqrt[4]{6\cdot 2+4}-2=0$ e $2-2=0$, vemos que o limite é indeterminado $0/0$. Com a troca de variáveis $6x+4=y^4$, temos que $y\to 2$, sempre que $x\to 2$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{6x+4}-2}{2-x} &= \lim_{y\to 2}\frac{\sqrt[4]{y^4}-2}{2-(y^4-4)/6}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{(16-y^4)/6}=\lim_{y\to 2}\frac{6(y-2)}{(2-y)(8+4y+2y^2+y^3)}\\ &= \lim_{y\to 2}\frac{-6}{8+4y+2y^2+y^3}=\frac{-6}{8+8+8+8}=-\frac{3}{16}.\end{aligned}$$

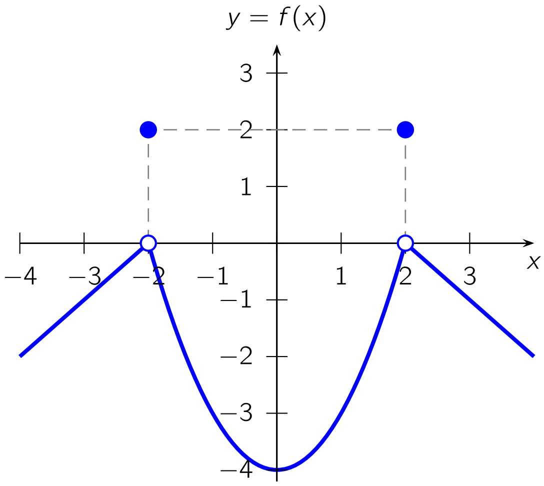
(b) Veja que $\dfrac{3^2-7\cdot 3+12}{3^2-6\cdot 3+9}=\dfrac{0}{0}$, ou seja, o limite é indeterminado. Fatorando so polinômios, temos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{x-3}=\frac{-1}{0}.$$

Analisando os limites laterais, temos: $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3^-\\(x<3)}}\frac{x-4}{x-3}=\frac{-1}{-0}=+\infty$ e $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3^+\\(x>3)}}\frac{x-4}{x-3}=\frac{-1}{+0}=-\infty$.

Questão 2.

A partir do gráfico de f, ao lado, temos:



- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}f(x)=0$ e $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}f(x)=0$;
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f(x)=-4$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=-4$;
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}f(x)=0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}f(x)=0$.

Veja que f é descontínua nos pontos $x=-2$ e $x=2$, pois:

- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to -2}f(x)=0\neq 2=f(-2)$;
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=0\neq 2=f(2)$.

No ponto $x=0$, vemos que f é contínua, pois:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-4=f(0).$$

Questão 3. Como a definição de derivada é $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ e $f(x)=\dfrac{1}{x}$, então

$$\left[\frac{1}{x}\right]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}\cdot\frac{1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=\frac{-1}{x^2}.$$

Questão 4.

(a) $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot(x^2+1)^5-e^x\cdot 5(x^2+1)^4\cdot 2x}{(x^2+1)^{10}}=\dfrac{e^x\cdot(x^2-10x+1)}{(x^2+1)^6}$;

(b)
$$\begin{aligned}g'(x) &= [x^3\cdot 3^x]'\cdot\mathrm{sen}(x)+x^3\cdot 3^x\cdot\cos(x)=[3x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 3^x\ln(3)]\cdot\mathrm{sen}(x)+x^3\cdot 3^x\cdot\cos(x)\\ &= 3x^2\cdot 3^x\cdot\mathrm{sen}(x)+x^3\cdot 3^x\ln(3)\cdot\mathrm{sen}(x)+x^3\cdot 3^x\cdot\cos(x).\end{aligned}$$

Verifique que: $[f\cdot g\cdot h]'=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$.

(c) $h'(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{8x-8}{\sqrt[4]{(2x^4-8x+\pi)^3}}-e^{1-x-x^2}\cdot(-1-2x)=\dfrac{2x-2}{\sqrt[4]{(2x^4-8x+\pi)^3}}+(1+2x)e^{1-x-x^2}$.

Questão 5.

(a) Como $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - x^2$, então $a_t = f'(1) = -2$ e $a_n = \dfrac{1}{2}$, pois $a_t \cdot a_n = -1$. Logo, afirmativa VERDADEIRA.

(b) Note que $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.Como f é uma função racional, quociente entre polinômios, e seu denominador é sempre não nulo, concluímos que f não possui assíntota vertical, pois não existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dfrac{k}{0} = \pm\infty$. Logo, a afirmativa é VERDADEIRA.