Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática
Cálculo B (MAT A03 / T06) — Professor: *Adriano Cattai*
Primeira Avaliação da Aprendizagem — Semestre: 2014.2 – 06/10/2014

Aluno(a): Matrícula:

Instruções:

1. A interpretação faz parte da avaliação;
2. Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;
3. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;
4. Utilize caneta **preta** ou **azul**;
5. Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;
6. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
7. Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
8. Nesta folha, escreva apenas seu nome.

"A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo." (Nelson Mandela)

Questão 1 (3,0) Seja R a região do plano limitada pelas cusrvas $x^2 + 4y = 13$ e $x + 5 = 2y$. (a) Esboce a região e expresse sua área em integrais; (b) Esboce o sólido e expresse seu volume em integrais, quando a região R é rotacionada em torno do eixo x. (Obs.: Não deixe de indetificar o elemento de área e nem o de volume.)

Questão 2 (1,5) Parametrizando a elipse $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, mostre que sua área é dada por πab.

Questão 3 (1,5) Usae o teorema de Pappus para determinar o centróide de um semicírculo de raio r.

Questão 4 (2,0) A base de um sólido é a região plana limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$. Cada seção do corte do sólido, perpendicular ao eixo x, é um triângulo equilátero. Esboce a região e calcule o volume deste sólido.

Questão 5 (2,0) As equações paramétricas do movimento de uma partícula no plano são $x(t) = e^t \cos(t)$ e $y(t) = e^t \operatorname{sen}(t)$, com a posição dada em metros e o tempo medido em segundos. Qual a distância percorrida pela particula entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$ segundos?

Boa Prova!

$$\sum_{R=1}^{5} R = \textbf{R}\text{epense} + \textbf{R}\text{ecuse} + \textbf{R}\text{eduza} + \textbf{R}\text{eutilize} + \textbf{R}\text{ecicle}.$$

Resolução / Dicas de Resolução

☺ **Questão 1** As curvas são uma parábola (concavidade voltada para baixo) e uma reta (crescente). Da equação $\dfrac{13-x^2}{4} = \dfrac{x+5}{2}$, temos $x=-3$ ou $x=1$. O elemento de área é $\mathrm{d}A = \dfrac{13-x^2}{4} - \dfrac{x+5}{2}\,\mathrm{d}x$, $-3 \le x \le 1$ (esboce o gráfico!). Logo,

?
? Fazer FIGURA
?

$$A = \int_{-3}^{1} \mathrm{d}A = \int_{-3}^{1} \frac{13-x^2}{4} - \frac{x+5}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \ldots = \frac{8}{3}.$$

Como o eixo de rotação não é fronteira da região, o sólido contém um "oco". Assim,

?
??? FIGURA
?

$$V(S) = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{13-x^2}{4}\right)^2\mathrm{d}x - \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{x+5}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{13-x^2}{4}\right)^2 - \left(\frac{x+5}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \ldots = \frac{64\pi}{5}.$$

☺ **Questão 2** Vimos, em sala, que as equações paramétricas da elipse são $x(t) = a\cos(t)$ e $y(t) = a\,\mathrm{sen}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Se $t \in [0, \pi/2]$, então temos um quarto da elipse, posicionada no primeiro quadrante. Logo,

?
??? FIGURA
?

$$\begin{aligned} A_E &= 4\int_{\pi/2}^{0} \underbrace{b\,\mathrm{sen}(t)}_{y}\cdot\underbrace{(-a\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{d}t)}_{\mathrm{d}x} = -4ab\int_{\pi/2}^{0}\mathrm{sen}^2(t)\,\mathrm{d}t = -4ab\int_{\pi/2}^{0}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2ab\int_{\pi/2}^{0} 1-\cos(2t)\,\mathrm{d}t = -2ab\left(t - \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = -2ab\left(0 - 0 - \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\right) = \pi ab. \end{aligned}$$

☺ **Questão 3** Considremos o círculo centrado na origem do sistema e tomemos o semicírculo superior. A área deste semicírculo é $\dfrac{\pi r^2}{2}$ e o volume do sólido obtido pela rotação deste, em torno do eixo x, é o volume da esfera de raio r, isto é, $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$. Como o centróide de regiões simétricas está localizado no eixo de simetria, temos $\bar{x} = 0$ e, assim, precisamos obter apenas $\bar{y}$. Por Pappus, o volume deste sólido é dado por $V = 2\pi\bar{y}A(R)$, em que $A(R)$ é a área da região rotacionada.

?
??? FIGURA
?

Equacionando, temos $2\pi\bar{y}\dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$. Donde $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$.

☺ **Questão 4** Note que o lado do triângulo equilátero é $\ell = 4 - x^2$. Como a área de um triângulo equilátero é dada por $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$, então $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}(4-x^2)^2}{4}$, $x \in [-2, 2]$. Portanto, o volume é

?
??? FIGURA
?

$$V(S) = \int_{-2}^{2} A(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-2}^{2} 16 - 8x^2 + x^4\,\mathrm{d}x = \ldots$$

☺ **Questão 5** No instante $t = 0$ a partícula está no ponto $(1, 0)$ e, no instante $t = \pi$ no ponto $(-e^{\pi}, 0)$. Temos $x'(t) = e^t\cos(t) - e^t\,\mathrm{sen}(t) = e^t(\cos(t) - \mathrm{sen}(t))$ e $y'(t) = e^t\,\mathrm{sen}(t) + e^t\cos(t) = e^t(\mathrm{sen}(t) + \cos(t))$. A distância percorrida pela partícula é dada pelo comprimento do arco

$$\int_0^{\pi}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \ldots = \sqrt{2}\int_0^{\pi} e^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1) \approx 31,31.$$

Escrito em LaTeX 2_ε, Cattai, 6 de outubro de 2014