Universidade Federal da Bahia

Departamento de Matemática
Cálculo A (MATA02 / T05)
Primeira Avaliação da Aprendizagem

Professor: *Adriano Cattai*
Semestre: 2015.1 – 13/04/2015

Aluno(a): Matrícula:

Instruções:

1. A interpretação faz parte da avaliação;
2. Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;
3. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;
4. Utilize caneta **preta** ou **azul**;
5. Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;
6. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
7. Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
8. Nesta folha, escreva apenas seu nome.

"Não precisamos de conhecimentos matemáticos para perceber que a felicidade será sempre uma incógnita de uma certa equação chamada vida." (Jorge Mágulas)

Questão 1 (1,0 + 1,5). (a) A partir da regra de derivada do produto, mostre que

$$[f \cdot g \cdot h]' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'.$$

Generalize a regra quando $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$;

(b) Seja r a reta de equação $3y + 2x = 6$ que é ortogonal à reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P(x_p, y_p)$. Sendo $f(x) = \cos^3(x) \cdot \text{sen}(x) + \dfrac{3x}{2}$, por meio da regra estabelecida no item (a), determine um par de coordenadas para P, desde que $x_p > 0$.

Questão 2 (3,0). Determine cada limite abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 2\sqrt[5]{x}}{3 + 4\sqrt[5]{x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos(x)}{x - \pi/2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x[\ln(x+2) - \ln(x)]$.

Questão 3 (1,5). esboce o gráfico de uma função $f : [1, 9] \to \mathbb{R}^*$, tal que atenda aos seguintes itens:

(1) $\nexists \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x)$;
(2) $\displaystyle\lim_{x \to 9^-} f(x) = -2$;
(3) $\exists \displaystyle\lim_{x \to 3} f(x)$;
(4) f descontínua em 3;
(5) Assín. Vert. $x = 5$;
(6) $\nexists\ f'(2)$.

Questão 4 (2,0). Derive cada função abaixo. Simplifique sua resposta.

(a) $f(x) = x\sqrt[3]{x} - \dfrac{\text{tg}(x)}{e^x}$;

(b) $g(x) = 3\sec(x) - (x^3 - 2x + \pi)\ln(x)$.

Questão 5 (1,0). Fazendo uso da definição de derivada, mostre que $[\sqrt{x}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Boa Prova!

$$\sum_{R=1}^{5} R = \textbf{R}\text{epense} + \textbf{R}\text{ecuse} + \textbf{R}\text{eduza} + \textbf{R}\text{eutilize} + \textbf{R}\text{ecicle}.$$

Resolução / Dicas de Resolução

Questão 1.

(a) Como $[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$, então

$$[f \cdot g \cdot h]' = [f \cdot g]' \cdot h + f \cdot g \cdot [h]' = [f' \cdot g + f \cdot g'] \cdot h + f \cdot g \cdot h' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'.$$

Generalizando, temos:

$$[f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n]' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'.$$

Note que o lado direito da igualdade possui n parcelas.

(b) Isolando y na equação de r temos que $a_r = -\dfrac{2}{3}$. Como $r \perp t$, então $a_r \cdot \_t = -1$, logo $a_t = \dfrac{3}{2}$. Precisamos agora, da derivada de f. Visto que $f(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + \dfrac{3x}{2}$, da derivada da soma e, conforme o item (a), temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [\cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x)]' + \left[\frac{3x}{2}\right]' \\
&= [\cos(x)]' \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \cdot [\cos(x)]' \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot [\cos(x)]' \cdot \operatorname{sen}(x) \\
&\quad + \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot [\operatorname{sen}(x)]' + \frac{3}{2} \\
&= 3[\cos(x)]' \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot [\operatorname{sen}(x)]' + \frac{3}{2} \\
&= -3\cos^2(x) \cdot \operatorname{sen}^2(x) + \cos^4(x) + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Como $f'(x_p) = \dfrac{3}{2}$, então

$$\begin{aligned}
-3\cos^2(x_p) \cdot \operatorname{sen}^2(x_p) + \cos^4(x_p) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad -3\cos^2(x_p) \cdot \operatorname{sen}^2(x_p) + \cos^4(x_p) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \cos^2(x_p)\big(-3\operatorname{sen}^2(x_p) + \cos^2(x_p)\big) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \cos^2(x_p) = 0 \text{ ou } -3\operatorname{sen}^2(x_p) + \cos^2(x_p) = 0.
\end{aligned}$$

Da primeira equação, $\cos^2(x_p) = 0$, temos $x_p = \dfrac{\pi}{2}$. Logo, $y_p = f(x_p) = \cos^3(\pi/2) \cdot \operatorname{sen}(\pi/2) + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$. Portanto, $P\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

$$\begin{cases} r \cap Oy & \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad A(0,2) \\ r \cap Ox & \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad P(3,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \cap Oy & \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -9/2 \quad \Rightarrow \quad Q(0,-9/2) \\ s \cap Ox & \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad P(3,0) \end{cases}$$

Questão 2.

(a) O limite $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 2\sqrt[5]{x}}{3 + 4\sqrt[5]{x}}$ é indeterminado $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, pois $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 1 - 2\sqrt[5]{x} = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 3 + 4\sqrt[5]{x} = -\infty$. Assim, podemos reescrever $f(x)$ da seguinte forma:

$$\frac{1 - 2\sqrt[5]{x}}{3 + 4\sqrt[5]{x}} = \frac{\sqrt[5]{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} - 2\right)}{\sqrt[5]{x}\left(\dfrac{3}{\sqrt[5]{x}} + 4\right)} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} - 2}{\dfrac{3}{\sqrt[5]{x}} + 4}.$$

Daí, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 2\sqrt[5]{x}}{3 + 4\sqrt[5]{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} - 2}{\dfrac{3}{\sqrt[5]{x}} + 4} = \frac{0 - 2}{0 + 4} = -\frac{1}{2}.$

(b) Veja que o limite $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos(x)}{x-\pi/2}$ é indeterminado $0/0$. Pela mudança de variável $y = x - \pi/2$, em que $y \to 0$ quando $x \to \pi/2$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)}{x-\pi/2} &= \lim_{y\to 0}\frac{\cos(y+\pi/2)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(y)\cos(\pi/2)-\mathrm{sen}(y)\mathrm{sen}(\pi/2)}{y}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\cos(y)\overbrace{\cos(\pi/2)}^{0}}{y} - \lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}(y)\overbrace{\mathrm{sen}(\pi/2)}^{1}}{y}\\
&= 0 - \lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}(y)}{y} = 0 - 1 = -1.
\end{aligned}$$

(c) Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+2)-\ln(x)]$ é uma forma indeterminada $\infty - \infty$. Como

$$x[\ln(x+2)-\ln(x)] = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^x = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x,$$

temos:

$$\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+2)-\ln(x)] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \ln\left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}_{=e^2}\right) = \ln(e^2) = 2\ln(e) = 2.$$

Questão 3.

Várias possibilidades!

Questão 4.

$$\begin{aligned}
\text{(a) } f'(x) &= [x\sqrt[3]{x}]' - \left[\frac{\mathrm{tg}(x)}{e^x}\right]' = [x^{4/3}]' - \frac{\sec^2(x)e^x - \mathrm{tg}(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{\sec^2(x)-\mathrm{tg}(x)}{e^x}\\
&= \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} - e^{-x}\sec^2(x) + e^{-x}\mathrm{tg}(x)
\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } g'(x) &= [3\sec(x)]' - [(x^3-2x+\pi)\ln(x)]' = 3\sec(x)\mathrm{tg}(x) - (3x^2-2+0)\ln(x) - (x^3-2x+\pi)\frac{1}{x}\\
&= 3\sec(x)\mathrm{tg}(x) - (3x^2-2)\ln(x) - x^2 + 2 - \frac{\pi}{x}
\end{aligned}.$$

Questão 5.

Dada uma função $f(x)$, $f'(x)$, por definição, é dada pelo limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
[\sqrt{x}]' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Veja que $[\sqrt{x}]'$ existe quando $x > 0$.