Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática
Cálculo A (MAT A02 / T08) — Professor: *Adriano Cattai*
Primeira Avaliação da Aprendizagem — Semestre: 2014.2 – 29/09/2014

Aluno(a): Matrícula:

Instruções:

1. A interpretação faz parte da avaliação;
2. Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;
3. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;
4. Utilize caneta **preta** ou **azul**;
5. Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;
6. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
7. Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
8. Nesta folha, escreva apenas seu nome.

"A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo." (Nelson Mandela)

Questão 1 (3,0). Determine cada limite abaixo e dê o significado do resultado obtido.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{4x-8}-2}{x^2-x-12}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x+2} - \frac{3}{x^4-16}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\sqrt[3]{\cos(x)}}$.

Questão 2 (0,5+0,4+0,4). Usando o conceito de derivada, determine a equação da reta tangente à curva $y = 2 + x^2$, cujo ângulo de inclinação (da reta) é $\frac{\pi}{3}$. Num mesmo sistema de coordenadas, exiba o esboço gráfico de f e da reta tangente.

Questão 3 (0,5+0,5+0,5). Num mesmo sistema de coordenadas, esboce os gráficos das funções $y = \cos(x)$ e $y = x^2$, para identificar, geometricamente, os intervalos que contém as duas raízes da equação $\cos(x) = x^2$. Use o TVI para comprovar tal existência.

Questão 4 (3,2). Julgue cada afirmativa em verdadeiro ou falso.

(a) Se $f(x) = \operatorname{cotg}(x)$, então $f'(x) = \left[\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right]' = \dfrac{[\cos(x)]'}{[\operatorname{sen}(x)]'} = \dfrac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x)$;

(b) Se $f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)$, então $f'(x) = f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x) + f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot f_3(x) + f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3'(x)$;

(c) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq -3$ e $f(-3) = 3$. Claro que ou (i) $\nexists \lim\limits_{x\to -3} f(x)$, ou (ii) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 3$ ou (iii) se existir, $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ será negativo;

(d) A função $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ possui duas assíntotas verticais.

Questão 5 (1,0). Determine a derivada de $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{\sec(x)} - 2^x \cdot \ln(x)$.

Boa Prova!

Repense, **R**ecuse, **R**eduza, **R**eutilize e **R**ecicle. *Abrace esta ideia!*

Resolução / Dicas de Resolução

Questão 1.

(a) Temos uma indeterminação 0/0, pois $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{4x-8}-2 = \lim\limits_{x\to 4} x^2-x-12 = 0$. Da mudança de variável $y^3 = 4x-8$, temos $y \to 2$ e $x = \dfrac{y^3+8}{4}$. Como $x^2-x-12 = (x+3)(x-4)$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{4x-8}-2}{x^2-x-12} &= \lim_{y\to 2}\frac{y-2}{\left(\dfrac{y^3+8}{4}+3\right)\left(\dfrac{y^3+8}{4}-4\right)} = \lim_{y\to 2}\frac{y-2}{\left(\dfrac{y^3+20}{4}\right)\left(\dfrac{y^3-8}{4}\right)} = \lim_{y\to 2}\frac{16(y-2)}{(y^3+20)(y^3-8)}\\ &= \lim_{y\to 2}\frac{16(y-2)}{(y^3+20)(y-2)(y^2+2y+4)} = \lim_{y\to 2}\frac{16}{(y^3+20)(y^2+2y+4)} = \frac{1}{21}.\end{aligned}$$

Isto é, podemos fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de $\dfrac{1}{21}$, tomando x suficientemente próximo de 4, mantendo $x \neq 4$.

(b) Como $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{-4}{0} = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3}{x^4-16} = \dfrac{3}{0} = \pm\infty$, i.é., são infinitos, iremos reduzir a função em um única fração (famosso MMC) e analisar os limites laterais.

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} - \frac{3}{x^4-16} = \frac{x-2}{x+2} - \frac{3}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{(x-2)^2(x^2+4)-3}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-}\frac{(x-2)^2(x^2+4)-3}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}\\ &= \frac{(-4)^2\cdot[(-2)^2+4]-3}{(-4)\cdot(0^-)\cdot[(-2)^2+4]}\\ &= \frac{+125}{(0^-)\cdot(-32)} = \frac{+125}{0^+} = +\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+}\frac{(x-2)^2(x^2+4)-3}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}\\ &= \frac{(-4)^2\cdot[(-2)^2+4]-3}{(-4)\cdot(0^+)\cdot[(-2)^2+4]}\\ &= \frac{+125}{(0^+)\cdot(-32)} = \frac{+125}{0^-} = -\infty.\end{aligned}$$

Assim, afirmamos que $f(x)$ cresce ilimitadamente, sempre que x estiver suficientemente próximo de -2, com valores MENORES do que -2, mantendo $x \neq -2$, e $f(x)$ decresce ilimitadamente, sempre que x estiver suficientemente próximo de -2, com valores MAIORES do que -2, mantendo $x \neq -2$.

(c) Perceba que o limite é indeterminado, 0/0, e que $1-\cos(x) = \left(1-\sqrt[3]{\cos(x)}\right)\left(1+\sqrt[3]{\cos(x)}+\sqrt[3]{\cos^2(x)}\right)$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt[3]{\cos(x)}} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt[3]{\cos(x)}}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{\cos(x)}+\sqrt[3]{\cos^2(x)}}{1+\sqrt[3]{\cos(x)}+\sqrt[3]{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1+\sqrt[3]{\cos(x)}+\sqrt[3]{\cos^2(x)}\right)}{1-\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt[3]{\cos(x)}+\sqrt[3]{\cos^2(x)}}{\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt[3]{\cos(x)}+\sqrt[3]{\cos^2(x)}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}}_{(\heartsuit)}} = \frac{3}{1/2} = 6.\end{aligned}$$

Isto é, podemos fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de 6, tomando x suficientemente próximo de 0, mantendo $x \neq 0$.

($\heartsuit$) O $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ é obtido a partir fundamental trigonométrico, multiplicando e dividindo por $1+\cos(x)$.

Questão 2.

Pela definição de derivada, no ponto x_0, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

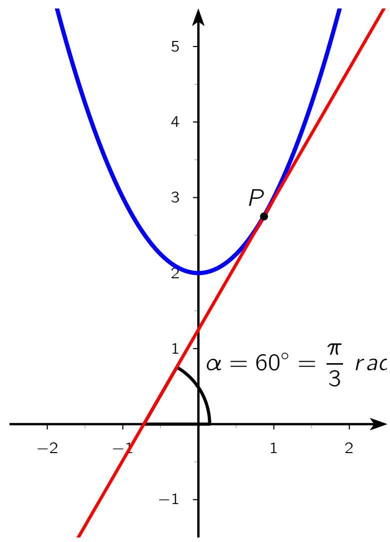
Ainda, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = 2+(x_0+\Delta x)^2-[2+x_0^2] = \Delta x(2x_0+\Delta x)$. Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2x_0+\Delta x = 2x_0.\end{aligned}$$

Ou seja, $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $y_0 = 2 + x_0^2 = 2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{11}{4}$.

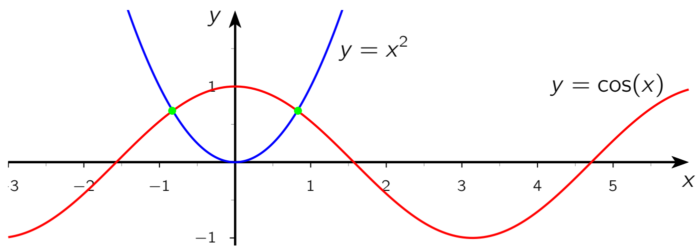
Portanto, o ponto da curva $y = 2 + x^2$ em que a reta tangente tem ângulo de inclinação $\dfrac{\pi}{3}$ é $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{11}{4}\right)$. A equação da reta t é dada por:

$$t : y - \frac{11}{4} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 4y - 4\sqrt{3}x = 5.$$



Questão 3.

Conforme o esboço a baixo, percebemos que as raízes da equação estão nos intervalos $[-\pi/2, 0]$ e $[0, \pi/2]$.



Como $\cos(x) = x^2$ é equivalente a $x^2 - \cos(x) = 0$, escrevemos $f(x) = x^2 - \cos(x)$. Assim, vemos que f é contínua em todo $\mathbb{R}$, por se tratar de uma direferança entre duas contínuas em $\mathbb{R}$, em especial nos intervalos $[-\pi/2, 0]$ e $[0, \pi/2]$. Calculando as imagens nos estremos destes intervalos, temos:

$$\begin{array}{lclclclcl} f(-\pi/2) &=& (-\pi/2)^2 - \cos(-\pi/2) &=& \pi^2/4 - 0 &=& \pi^2/4 &>& 0\\ f(0) &=& (0)^2 - \cos(0) &=& 0 - 1 &=& -1 &<& 0\\ f(\pi/2) &=& (\pi/2)^2 - \cos(\pi/2) &=& \pi^2/4 - 0 &=& \pi^2/4 &>& 0\end{array}$$

Pela continuidade de f e, visto que $f(-\pi/2)\cdot f(0) < 0$ e $f(0)\cdot f(\pi/2) < 0$, o TVI garante a existência de uma raiz em cada intervalo e, portanto, mostramos que a equação $\cos(x) = x^2$ possui duas raízes.

Questão 4.

(a) Claro que não. Nem aqui e nem na China! Use a regra da derivada do quocente para chegar em $-\text{cossec}^2(x)$;

(b) Claro que sim. Use a regra da derivada do produto em $f(x) = h(x)\cdot f_3(x)$, supondo que $h(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)$ e, depois, use a mesma regra para obter $h'(x)$;

(c) Não! Todos os três itens são falsos. Veja a questão 08 da lista de exercícios disponível na página da nossa disciplina;

(d) Falso! Ela possui apenas uma assíntota vertical, a reta $x = -2$. (Por que?)

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+x+1}{x+2}.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{7}{4}$ e $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \dfrac{3}{0} = \infty$ (faltando estudar o sinal do denominador).

Questão 5. Pela regra da adição/subtração, temos $f'(x) = \left[\dfrac{x^3-1}{\sec(x)}\right]' - [2^x\cdot\ln(x)]'$. Usando a regra do quociente e do produto, respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2\sec(x) - (x^3-1)\sec(x)\text{tg}(x)}{\sec^2(x)} - \left(2^x\ln(2)\ln(x) + 2^x\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^2 - (x^3-1)\text{tg}(x)}{\sec(x)} - 2^x\ln(2)\ln(x) - \frac{2^x}{x}\\ &= 3x^2\cos(x) - (x^3-1)\text{sen}(x) - 2^x\ln(2)\ln(x) - \frac{2^x}{x}.\end{aligned}$$