

Lista de Exercícios: Relações e Funções
(Fundamentos de Matemática Elementar, Vol 1, Gelson Iezzi)

Parte I: Relações

A.93 Dados os conjuntos

$$A = \{1, 3, 4\} \quad B = \{-2, 1\} \quad C = \{-1, 0, 2\}$$

representar pelos elementos e pelo gráfico cartesiano os seguintes produtos:

- a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A \times C$
d) $C \times A$ e) B^2 f) C^2

A.94 Dados os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$$

representar graficamente os seguintes produtos:

- a) $A \times B$ b) $A \times C$ c) $B \times C$
d) $C \times B$ e) A^2 f) C^2

A.95 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ representar graficamente os conjuntos:

- a) $A \times B$
b) $B \times A$
c) $(A \times B) \cup (B \times A)$

A.96 Sejam os conjuntos A, B e C tais que $A \subset B \subset C$. Estabelecer as relações de inclusão entre os conjuntos $A \times A, A \times B, A \times C, B \times A, B \times B, B \times C, C \times A, C \times B$ e $C \times C$.

A.97 Sabendo que $\{(1, 2), (4, 2)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 9$, represente pelos elementos o conjunto A^2 .

Solução

O número de elementos de A^2 é igual ao quadrado do número de elementos de A , portanto

$$n(A^2) = [n(A)]^2 \implies [n(A)]^2 = 9 \implies n(A) = 3.$$

Se A é um conjunto de 3 elementos, $(1, 2) \in A^2$ e $(4, 2) \in A^2$, concluímos que $A = \{1, 2, 4\}$.

Assim sendo,

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$$

A.98 Se $\{(1, -2), (3, 0)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 16$ então represente A^2 pelos seus elementos.

A.99 Considerando $A \subset B, \{(0, 5), (-1, 2), (2, -1)\} \subset A \times B$ e $n(A \times B) = 12$, represente $A \times B$ pelos seus elementos.

A.100 Pede-se:

- I) enumerar pares ordenados
II) representar por meio de flechas
III) fazer o gráfico cartesiano

das relações binárias de $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ definidas por:

- a) $x R y \iff x + y = 2$ b) $x S y \iff x^2 = y$
c) $x T y \iff |x| = |y|$ d) $x V y \iff x + y > 2$
e) $x W y \iff (x - y)^2 = 1$

A.101 Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Enumerar os pares ordenados e construir o gráfico cartesiano da relação R em A dada por:

$$R = \{(x, y) \in A^2 \mid \text{mdc}(x, y) = 2\}$$

A.102 Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Construir o gráfico cartesiano da relação R em A definida por:

$$x R y \iff x \text{ e } y \text{ são primos entre si.}$$

A.103 Dado o conjunto $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid -7 \leq m \leq 7\}$. Construir o gráfico cartesiano da relação binária R em A definida por:

$$x R y \iff x^2 + y^2 = 25.$$

A.104 Estabelecer o domínio e a imagem das seguintes relações:

- a) $\{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$ b) $\{(-2, 4), (-1, 1), (3, -7), (2, 1)\}$
 c) $\{(2, 1), (1, -3), (5, \sqrt{2})\}$ d) $\{(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}), (1 - \sqrt{3}, 1)\}$
 e) $\{(3, \frac{1}{2}), (\frac{5}{2}, -1), (\frac{3}{2}, 0)\}$

A.105 Estabelecer o domínio e a imagem das relações binárias do exercício **A.100**.

A.106 Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e R a relação binária de A em B definida por

$$x R y \iff x = y^2$$

Pede-se:

- a) enumerar os pares ordenados de R
 b) enumerar os elementos do domínio e da imagem de R
 c) fazer o gráfico cartesiano de R

A.107 Se R é a relação binária de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$ definida por

$$x R y \iff x = 2y$$

Pede-se:

- a) a representação cartesiana de $A \times B$
 b) a representação cartesiana de R
 c) o domínio e a imagem de R

A.108 Se R e S são as relações binárias de $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 5\}$ em $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq y \leq 3\}$ definidas por:

$$x R y \iff 2 \text{ divide } (x - y)$$

$$x S y \iff (x - 1)^2 = (y - 2)^2.$$

Pedem-se:

- a) as representações cartesianas de R e de S
 b) o domínio e a imagem de R e de S
 c) $R \cap S$.

A.109 Enumerar os elementos de R^{-1} , relação inversa de R , nos seguintes casos:

- a) $R = \{(1, 2), (3, 1), (2, 3)\}$
 b) $R = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1), (-2, 1)\}$
 c) $R = \{(-3, -2), (1, 3), (-2, -3), (3, 1)\}$

A.110 Enumerar os elementos e esboçar os gráficos de R e R^{-1} , relações binárias em $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$, nos seguintes casos:

- a) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x + y = 8\}$
 b) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x + 2y = 10\}$
 c) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = (x - 3)^2 + 1\}$
 d) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = 2^x\}$

A.111 Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 10\}$ e as seguintes relações binárias:

- a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$
 b) $S = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$
 c) $T = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$
 d) $V = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 7\}$

pede-se o gráfico cartesiano dessas relações e das respectivas relações inversas.

Parte II: Funções

A.115 Qual é a notação das seguintes funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} ?

- a) f associa cada número real ao seu oposto
- b) g associa cada número real ao seu cubo
- c) h associa cada número real ao seu quadrado menos 1
- d) k associa cada número real ao número 2

A.116 Qual é a notação das seguintes funções?

- a) f é função de \mathbb{Q} em \mathbb{Q} que associa cada número racional ao seu oposto adicionado com 1.
- b) g é a função de \mathbb{Z} em \mathbb{Q} que associa cada número inteiro à potência de base 2 desse número.
- c) h é a função de \mathbb{R}^* em \mathbb{R} que associa cada número real ao seu inverso.

A.117 Seja f a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcular:

- a) $f(2)$
- b) $f(-1)$
- c) $f(\frac{1}{2})$
- d) $f(-\frac{1}{3})$
- e) $f(\sqrt{3})$
- f) $f(1 - \sqrt{2})$

A.118 Seja f a função de \mathbb{Z} em \mathbb{Z} definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcular:

- a) $f(2)$
- b) $f(-3)$
- c) $f(0)$
- d) $f(\frac{3}{2})$

A.119 Seja f a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

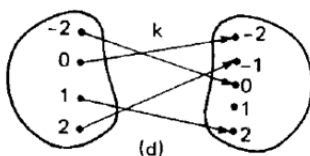
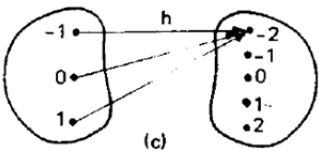
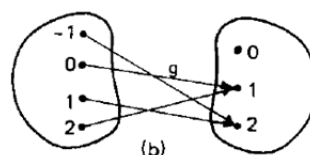
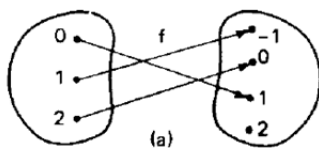
- a) $f(3)$
- b) $f(-\frac{3}{7})$
- c) $f(\sqrt{2})$
- d) $f(\sqrt{4})$
- e) $f(\sqrt{3} - 1)$
- f) $f(0,75)$

A.120 Seja a função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$. Qual é o elemento do domínio que tem $-\frac{3}{4}$ como imagem?

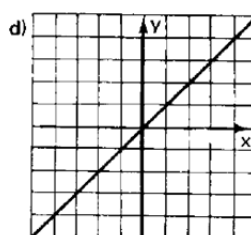
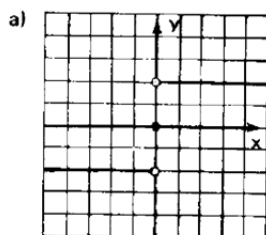
A.121 Seja a função f de $\mathbb{R} - \{1\}$ em \mathbb{R} definida por $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$. Qual é o elemento do domínio que tem imagem 2?

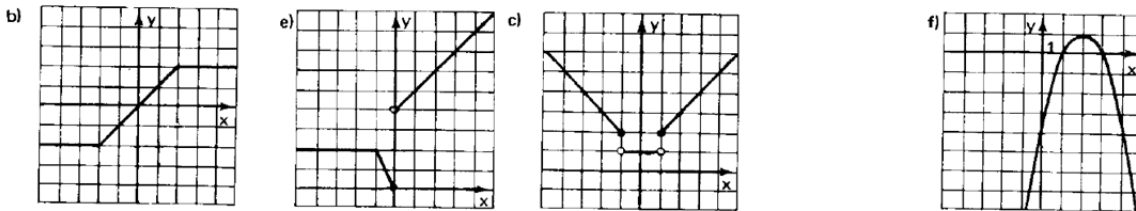
A.122 Quais são os valores do domínio da função real definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$ que produzem imagem igual a 3?

A.123 Estabelecer o domínio e a imagem das funções abaixo:

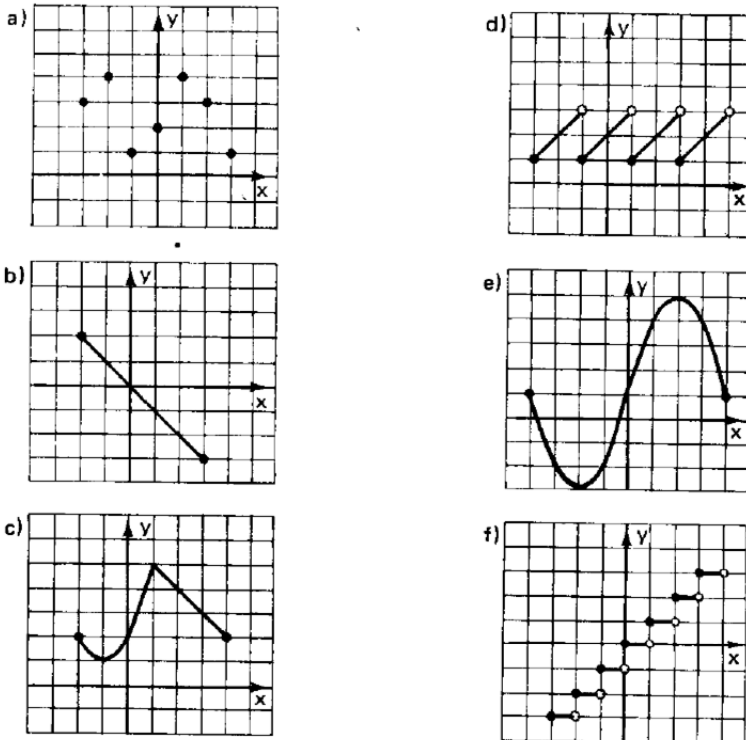


A.124 Nos gráficos cartesianos das funções abaixo representadas, determinar o conjunto imagem.





A.125 Considerando que os gráficos abaixo são gráficos de funções, estabelecer o domínio e a imagem.



A.126 Dar o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$	b) $g(x) = \frac{1}{x + 2}$
c) $h(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$	d) $p(x) = \sqrt{x - 1}$
e) $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$	f) $r(x) = \frac{\sqrt{x + 2}}{x - 2}$
g) $s(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$	h) $t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x + 3}}$
i) $u(x) = \frac{\sqrt[3]{x + 2}}{x - 3}$	

A.127 Sejam as funções f , g e h de \mathbb{R} em \mathbb{R} definidas por $f(x) = x^3$, $g(y) = y^3$ e $h(z) = z^3$. Quais delas são iguais entre si?

A.128 As funções: f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e g de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $g(x) = x$ são iguais? Justificar.

A.129 As funções f e g cujas leis de correspondência são

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \quad \text{podem ser iguais? Justificar.}$$

A.130 As funções f e g de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$ em \mathbb{R} , definidas por:

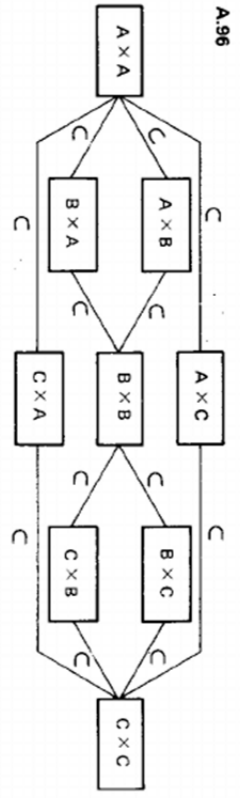
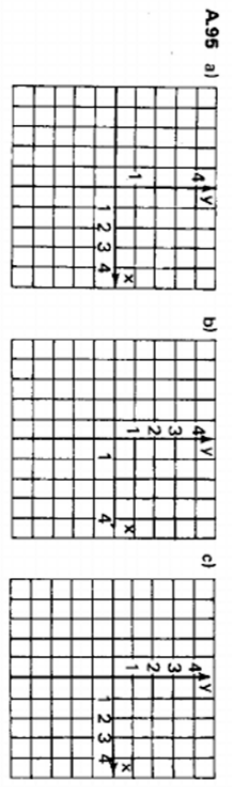
$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x}} \quad \text{são iguais? Justificar.}$$

A.131 As funções:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{são iguais? Justificar.}$$

$$x \mapsto x + 1 \quad \quad \quad x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

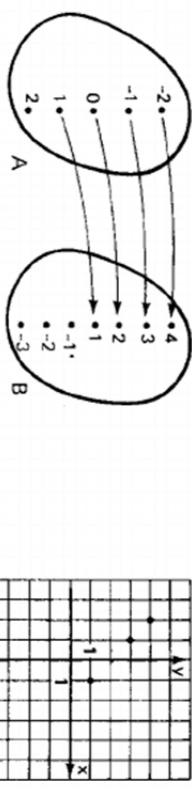
Respostas



A.98 $A^2 = \{(-2, -2), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 3), (0, -2), (0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, -2), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (3, -2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$

A.99 $A \times B = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2), (-1, 5), (0, -1), (0, 0), (0, 2), (0, 5), (2, -1), (2, 0), (2, 2), (2, 5)\}$

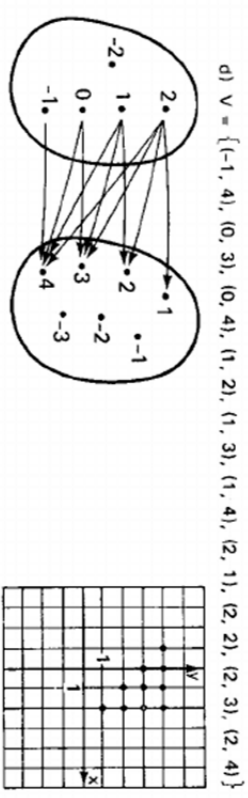
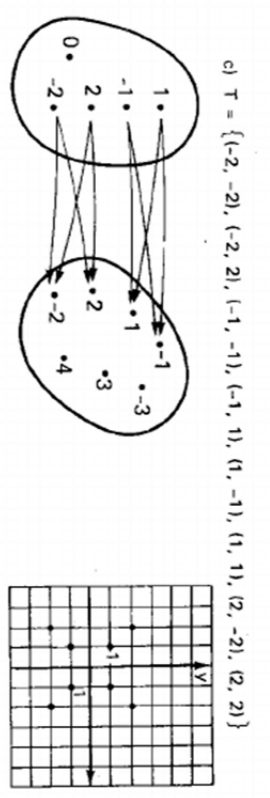
A.100 a) $R = \{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 1)\}$



b) $S = \{(-2, 4), (2, 4), (-1, 1), (1, 1)\}$



230-A



e) $W = \{(-2, -3), (-2, -1), (-1, -2), (0, -1), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$



A.101 $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)\}$

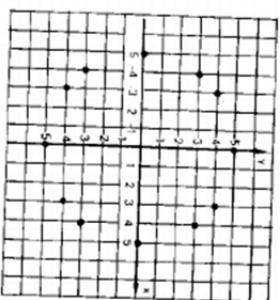


A.102



231-A

A.103



A.104 a) $D = \{1, 2\}$ e $\text{Im} = \{1, 3, 4\}$

b) $D = \{-2, -1, 3, 2\}$ e $\text{Im} = \{-7, 4, 1\}$

c) $D = \{2, 1, 5\}$ e $\text{Im} = \{1, -3, \sqrt{2}\}$

d) $D = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}\}$ e $\text{Im} = \{\sqrt{2}, 1\}$

e) $D = \{3, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$ e $\text{Im} = \{\frac{1}{2}, -1, 0\}$

A.105 a) $D(R) = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $\text{Im}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $D(S) = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $\text{Im}(S) = \{1, 4\}$

c) $D(T) = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $\text{Im}(T) = \{-2, -1, 1, 2\}$

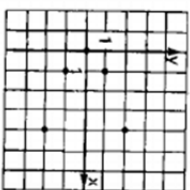
d) $D(V) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(V) = \{1, 2, 3, 4\}$

e) $D(W) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(W) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

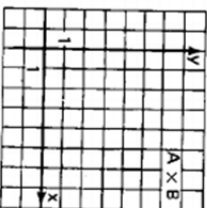
A.106 a) $R = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$

b) $D(R) = \{0, 1, 4\}$ e $\text{Im}(R) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

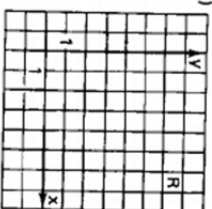
c)



A.107 a)



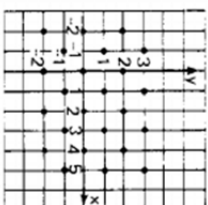
b)



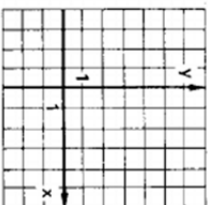
c) $D(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$ e $\text{Im}(R) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$

232-A

A.108 a)



b)



c) $R \cap S = \emptyset$

A.109 a) $R^{-1} = \{(2, 1), (1, 3), (3, 2)\}$

b) $R^{-1} = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, -2)\}$

c) $R^{-1} = \{-2, -3, (3, 1), (-3, -2), (1, 3)\}$

A.110 a) $R = R^{-1} = \{(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)\}$

b) $R = \{(0, 5), (2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1), (10, 0)\}$

$R^{-1} = \{(5, 0), (4, 2), (3, 4), (2, 6), (1, 8), (0, 10)\}$

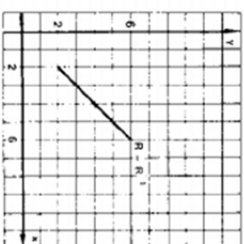
c) $R = \{(0, 10), (1, 5), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 5), (6, 10)\}$

$R^{-1} = \{(10, 0), (5, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 5), (10, 6)\}$

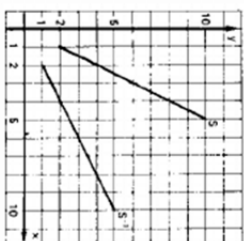
d) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$

$R^{-1} = \{(1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3)\}$

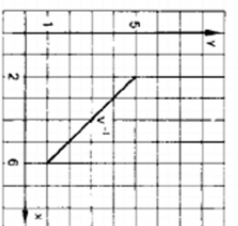
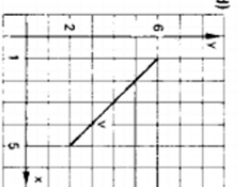
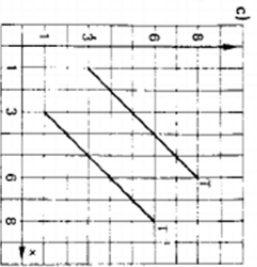
A.111 a)



b)



233-A



CAPÍTULO V

- A.112 a) não define função de A em B , pois o elemento $2 \in A$ não está associado a nenhum elemento de B .
 b) não define função de A em B , pois o elemento $1 \in A$ está associado a dois elementos de B .
 c e d) define função de A em B , pois todo elemento de A está associado a um único elemento de B .

A.113 somente (d) pois o conjunto de partida é $A = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto de chegada é $B = \{-1, 0, 1, 2\}$

- A.114 a) é função.
 b) não é função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , pois qualquer reta vertical conduzida pelos pontos $(x, 0)$, com $x > 0$, encontra o gráfico da relação em dois pontos.
 c) não é função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , pois qualquer reta vertical conduzida pelos pontos $(x, 0)$, com $-1 < x < 1$, não encontra o gráfico da relação.
 d) é função
 e) é função
 f) não é função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , pois a reta vertical conduzida pelo ponto $(3, 0)$ encontra o gráfico da relação em mais que dois pontos e as retas verticais conduzidas pelos pontos $(x, 0)$, com $x \neq 3$, não encontram o gráfico da relação.
- A.115 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -x$
 b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$
 c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 1$
 d) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2$
- A.116 a) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $x \mapsto -x + 1$
 b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $x \mapsto 2^x$
 c) $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$
- A.117 a) $f(2) = 2$
 b) $f(-1) = 8$
 c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$
 d) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{46}{9}$
 e) $f(\sqrt{3}) = 7 - 3\sqrt{3}$
 f) $f(1 - \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$
- A.118 a) $f(2) = 4$
 b) $f(-3) = -11$
 c) $f(0) = -2$
 f) $f\left(\frac{3}{2}\right)$ não tem significado pois $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

234-A

- A.119 a) $f(3) = 1$
 b) $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$
 c) $f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$
 d) $f(\sqrt{4}) = 1$
 e) $f(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}$
 f) $f(0,75) = 1$
- A.121 $x = -4$
- A.122 $x = 2$ ou $x = 3$
- A.123 a) $D(f) = \{0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(f) = \{-1, 0, 1\}$
 b) $D(g) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(g) = \{1, 2\}$
 c) $D(h) = \{-1, 0, 1\}$ e $\text{Im}(h) = \{-2\}$
 d) $D(k) = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(k) = \{-2, -1, 0, 2\}$
- A.124 a) $\text{Im} = \{-2, 0, 2\}$
 b) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$
 c) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 1 \text{ ou } y \geq 2\}$
 d) $\text{Im} = \mathbb{R}$
 e) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ ou } y > 4\}$
 f) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$
- A.125 a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $\text{Im} = \{1, 2, 3, 4\}$
 b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ e $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 2\}$
 c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$ e $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\}$
 d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$ e $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y < 3\}$
 e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$ e $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 5\}$
 f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 3\}$ e $\text{Im} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
- A.126 a) $D(f) = \mathbb{R}$
 b) $D(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$
 c) $D(h) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$
 d) $D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
 e) $D(q) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
 f) $D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ e } x \neq 2\}$
 g) $D(s) = \mathbb{R}$
 h) $D(t) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
 i) $D(n) = \mathbb{R} - \{3\}$
- A.127 Todas são iguais, pois são todas funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} e associam cada número real ao seu cubo.
- A.128 Não são iguais, pois para $x < 0$ temos $\sqrt{x^2} \neq x$.
- A.129 Somente serão iguais se forem funções de A em \mathbb{R} onde A é qualquer subconjunto de $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.
- A.130 São iguais, pois $\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x}}$ para $-1 < x \leq 0$ ou $x > 1$.
- A.131 Não são iguais, pois não têm o mesmo domínio.
- A.132 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -10\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{3}{4}\}$

235-A

