Geometria Analítica

NEAD - Núcleo de Educação a Distância

Curso de Licenciatura em Matemática

UFMA

Katia Frensel - Jorge Delgado

Março, 2011

Conteúdo

Prefácio

Este texto foi concebido para a disciplina de Geometria Analítica do curso de Licenciatura em Matemática da UFMA na modalidade à distância ou semi-presencial, os pre-requisitos para seu estudo não vão além da matemática do Ensino Médio. O conteúdo que apresentamos nas páginas seguintes faz uma revisão profunda e detalhada dos conceitos da Geometria Analítica abordados no Ensino Médio e serve como base para estudos posteriores de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear.

Nosso objetivo é o de abordar os conceitos fundamentais da Geometria Analítica não apenas do ponto de vista formal, mas também através de diversos exemplos e exercícios cuidadosamente resolvidos ao longo do texto. Muitos outros exercícios são propostos no final de cada capítulo, devendo o leitor tomar conta deles cuidadosamente para fixar o conteúdo apresentado, respostas para todos os exercícios propostos são também colocadas logo em seguida para facilitar a conferência por parte do leitor.

Na Bibliografía que sugerimos no final do texto o leitor pode encontrar diversos títulos cuja leitura ou consulta ajudará a expandir os assuntos aqui expostos ou vislumbrá-los com outro enfoque

Somos muito gratos ao NEAD/UFMA pela oportunidade que nos foi apresentada para participar do curso de Licenciatura em Matemática do projeto de Ensino à Distância, inicialmente, através deste texto. Em particular agradecemos imensamente ao Professor Artur Silva Santos pela paciência e motivação para que este texto fosse concebido.

Quaisquer sugestões e/ou críticas que nos permitam melhorar o conteúdo do presente texto serão muito bem recebidas no endereço *j.delgado.g@gmail.com*.

Niterói-RJ , março de 2011

Katia Frensel
Depto. de Geometria
IME-UFF

Jorge Delgado
Depto. de Matemática Aplicada
IME-UFF

Capítulo 1

Coordenadas na reta e no plano

A **Geometria Analítica** introduzida por **Pierre de Fermat** e **René Descartes**, por volta de 1636, foi muito importante para o desenvolvimento da Matemática. Através da representação de pontos da reta por números reais, pontos do plano por pares ordenados de números reais e pontos do espaço por ternos ordenados de números reais, curvas no plano e superfícies no espaço podem ser descritas por meio de equações, tornando possível tratar algebricamente muitos problemas geométricos e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica diversas questões algébricas.

Neste Capítulo vamos associar coordenadas numéricas a pontos de uma reta e de um plano, veremos como determinar a distância entre pontos numa reta e num plano. Caracterizaremos também os conceitos de ponto médio de um segmento, mediatriz e círculo.

Ao longo destas notas, admitiremos que o leitor tenha conhecimento dos principais axiomas e resultados da Geometria Euclidiana no plano e no espaço, relativos aos seus elementos básicos: pontos, retas e planos. Por exemplo: por dois pontos distintos passa uma, e somente uma reta; por três pontos do espaço não situados na mesma reta passa um, e somente um plano; fixada uma unidade de medida de comprimento, a cada par de pontos A e B corresponde um número real não-negativo, denominado **distância** entre os pontos A e B ou **comprimento** do segmento $\overline{AB}$, que designamos por $d(A,B)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

- **(a)** $d(A,B) \geq 0$.
- **(b)** $d(A,B) = 0 \iff A = B$.
- **(c)** $d(A,B) = d(B,A)$.
- **(d)** $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ (desigualdade triangular).
- **(e)** $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$
  $\iff A$, B e C são colineares e C está entre A e B.

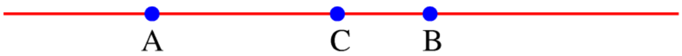

Fig. 1: O ponto C está entre A e B, logo $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$.

1. Coordenadas na reta

Uma reta r é **orientada** quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso dito **positivo**. O sentido oposto é denominado **negativo**.

Fig. 2: Escolha de um sentido de percurso na reta r.

Sejam A e B pontos na reta r. Dizemos que B **está à direita** de A (ou que A **está à esquerda** de B) quando o sentido de percurso de A para B coincide com o sentido positivo escolhido na reta r.

Fig. 3: B está à direita de A na reta orientada r.

Um **eixo** E é uma reta orientada na qual é fixado um ponto O, chamado **origem**.

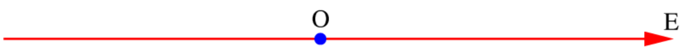

Fig. 4: Origem O escolhida no eixo E.

Todo eixo E pode ser posto em **correspondência biunívoca** com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais da seguinte maneira:

$$\boxed{E \longleftrightarrow \mathbb{R}}$$

(a) à origem O do eixo faz-se corresponder o número zero.

(b) a cada ponto X de E à direita de O corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$.

(c) a cada ponto X de E à esquerda de O corresponde o número real negativo $x = -d(O, X)$. O número real x, correspondente ao ponto X, é chamado a **coordenada** do ponto X no eixo E.

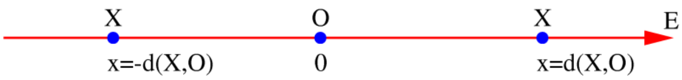

Fig. 5: Coordenada de um ponto X do eixo E em relação à origem O.

Proposição 1

Sejam X e Y dois pontos sobre o eixo E com coordenadas x e y respectivamente. Então,

$$\boxed{d(X, Y) = |y - x| = |x - y|}$$

Prova.

Se $X = Y$, não há o que provar.

Suponhamos que $X \neq Y$. Para fixar as idéias, vamos assumir que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$.

Temos três casos a considerar:

Caso 1. X e Y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$.

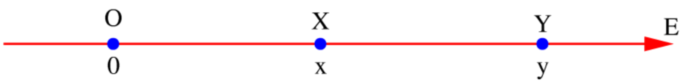

Fig. 6: Caso 1: $0 < x < y$.

Como X está entre O e Y, $d(O, X) = x$ e $d(O, Y) = y$, temos, por $d(O, Y) = d(O, X) + d(X, Y)$, que

$$y = x + d(X, Y).$$

Portanto,

$$d(X, Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 2. X e Y estão à esquerda da origem. Isto é, $x < y < 0$.

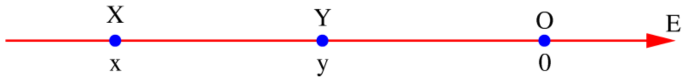

Fig. 7: Caso 2: $x < y < 0$.

Neste caso, Y está entre X e O, $d(O,X) = -x$ e $d(O,Y) = -y$.
Logo,

$$d(O,X) = d(X,Y) + d(Y,O) \iff -x = d(X,Y) - y,$$

ou seja,

$$d(X,Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 3. X e Y estão em lados opostos em relação à origem. Isto é, $x < 0 < y$.

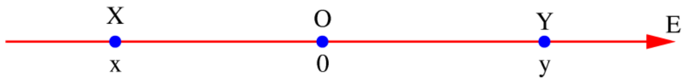

Fig. 8: Caso 3: $x < 0 < y$.

Como O está entre X e Y, $d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y)$.
Além disso,

$$d(X,O) = -x \;\text{ e }\; d(O,Y) = y.$$

Logo,

$$d(X,Y) = -x + y = y - x = |y - x|. \blacksquare$$

Observação 1

• Se X estiver à direita de Y, a demonstração é feita de maneira similar.

• Sejam X e Y pontos de coordenadas x e y, e M o **ponto médio** do segmento $\overline{XY}$, de coordenada m. Então,

$$\boxed{m = \frac{x+y}{2}}$$

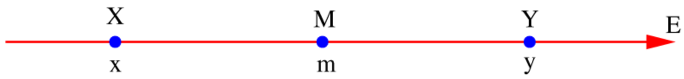

Fig. 9: Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{XY}$, temos $d(M,X) = d(M,Y)$.

De fato, suponhamos que X está à esquerda de Y. Como o ponto médio M está entre X e Y, temos $x < m < y$. Logo,

$$d(M,X) = d(M,Y) \iff |x - m| = |y - m| \iff m - x = y - m$$

$$\iff 2m = x + y \iff m = \frac{x+y}{2}.$$

2. Coordenadas no Plano

• Designamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais.

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}}$$

O número x é a *primeira coordenada* e o número y é a *segunda coordenada* do par ordenado (x, y).

• Um **sistema de eixos ortogonais** num plano π é um par de eixos perpendiculares OX e OY contidos em π que têm a mesma origem O.
O eixo$-OX$ é o *eixo-horizontal* e o eixo$-OY$ é o *eixo-vertical*.

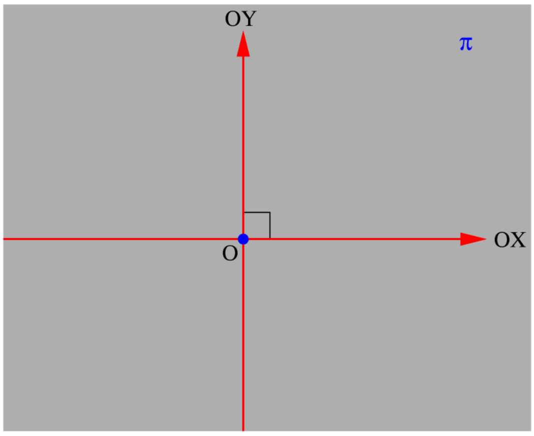

Fig. 10: Sistema OXY no plano π.

• Um plano π munido de um sistema de eixos ortogonais se corresponde com o conjunto $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2}$$

De fato, se $P \in \pi$, tomamos as retas r e s tais que:

- $r \parallel$eixo$-OY$ e $P \in r$,
- $s \parallel$eixo$-OX$ e $P \in s$.

Se o ponto X onde a reta r intersecta o eixo-OX tem coordenada x no eixo$-OX$ e o ponto Y de interseção da reta s com o eixo-OY tem coordenada y nesse eixo, associa-se ao ponto P o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

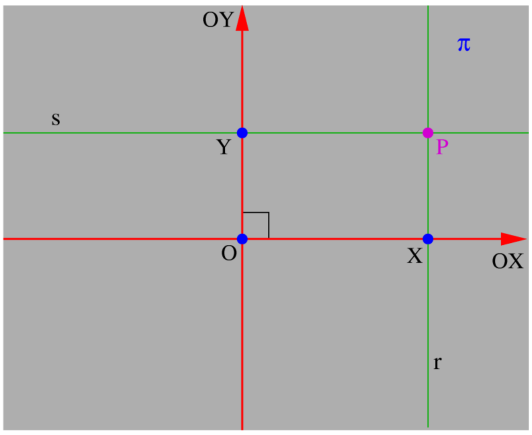

Fig. 11: Coordenadas do ponto $P \in \pi$

Reciprocamente:

Dado o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que, *se:*

- X é o ponto do eixo$-OX$ de coordenada x;
- Y é o ponto do eixo$-OY$ de coordenada y;
- r é a reta paralela ao eixo$-OY$ que passa por X;
- s é a reta paralela ao eixo$-OX$ que passa por Y,

então $\{P\} = r \cap s$.

• Os números x e y chamam-se as *coordenadas cartesianas do ponto P relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado*.

A coordenada x é a *abscissa* de P e y é a *ordenada* de P.

Observação 2

No eixo$-OX$, os pontos têm coordenadas $(x, 0)$.

No eixo$-OY$, os pontos têm coordenadas $(0, y)$.

Observação 3

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**:

Primeiro Quadrante
$= \{(x, y) \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$
Segundo Quadrante
$= \{(x, y) \mid x < 0 \text{ e } y > 0\}$
Terceiro Quadrante
$= \{(x, y) \mid x < 0 \text{ e } y < 0\}$
Quarto Quadrante
$= \{(x, y) \mid x > 0 \text{ e } y < 0\}$

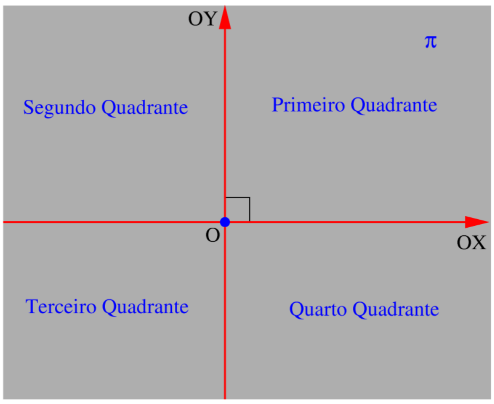

Fig. 12: Quadrantes e eixos ortogonais no plano.

Cada ponto do plano pertence a um dos eixos ortogonais ou a um dos quadrantes.

Observação 4

Dados dois eixos concorrentes quaisquer, o processo acima descrito permite estabelecer também uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e pares ordenados de números reais.

De fato (veja a figura 13), cada ponto P do plano é o ponto de interseção de duas retas paralelas aos eixos coordenados. A paralela ao eixo$-OY$ que passa por P intersecta o eixo$-OX$ num ponto cuja coordenada nesse eixo é a **primeira coordenada** x de P. Analogamente, a paralela ao eixo$-OX$ que passa por P intersecta o eixo$-OY$ num ponto cuja coordenada nesse eixo é a **segunda coordenada** y de P.

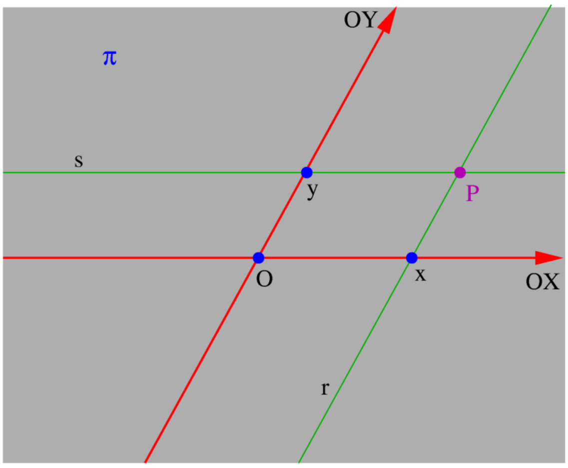

Fig. 13: Sistema de eixos não-ortogonais.

3. Distância entre dois pontos no plano

Sejam π um plano munido de um sistema de eixos ortogonais OXY, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano π e seja $Q = (x_1, y_2)$. Como $d(P_1, Q) = |y_2 - y_1|$ e $d(P_2, Q) = |x_2 - x_1|$ temos, pelo *Teorema de Pitágoras* (ver Fig. 14),

$$d(P_1,P_2)^2 = d(P_2,Q)^2 + d(P_1,Q)^2 \iff d(P_1,P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \iff$$

$$\boxed{d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

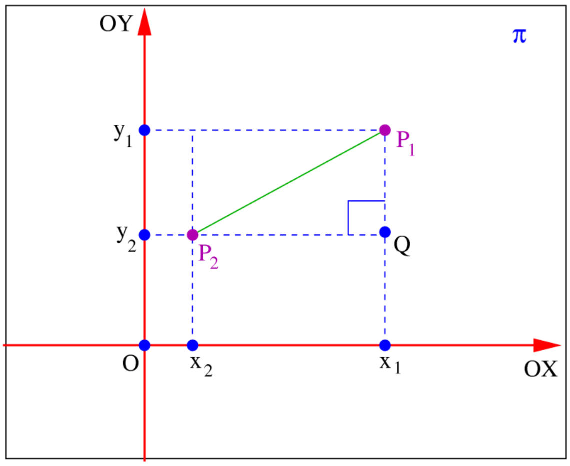

Fig. 14: Distância entre dois pontos no plano.

Observação 5

Sejam OXY um sistema de eixos concorrentes não-ortogonais, que se intersectam segundo um ângulo θ, e $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano.

Pela lei dos cossenos, a distância entre P_1 e P_2 é dada por:

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, Q)^2 + d(P_2, Q)^2 - 2\cos(\pi - \theta) d(P_1, Q)\, d(P_2, Q) \iff$$

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + 2\cos(\theta)\, |x_2 - x_1|\, |y_2 - y_1|}}$$

A complexidade dessa fórmula para calcular a distância entre dois pontos num sistema de eixos não-ortogonais é uma motivação para a preferência pelos sistemas de eixos ortogonais, no qual a fórmula para o cálculo da distância é bem mais simples.

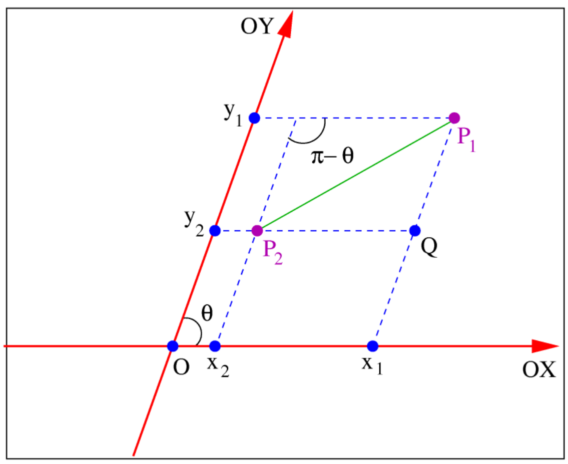

Fig. 15: Distância num sistema não-ortogonal do plano.

Definição 1

Dados um ponto A num plano π e um número $r > 0$, o **círculo C de centro A e raio $r > 0$** é o conjunto dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A, ou seja:

$$C = \{P \in \pi \mid d(P,A) = r\}.$$

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano π e sejam a e b as coordenadas do centro A nesse sistema de eixos. Então,

$$P \in C \iff d(P,A) = r \iff d(P,A)^2 = r^2 \iff$$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

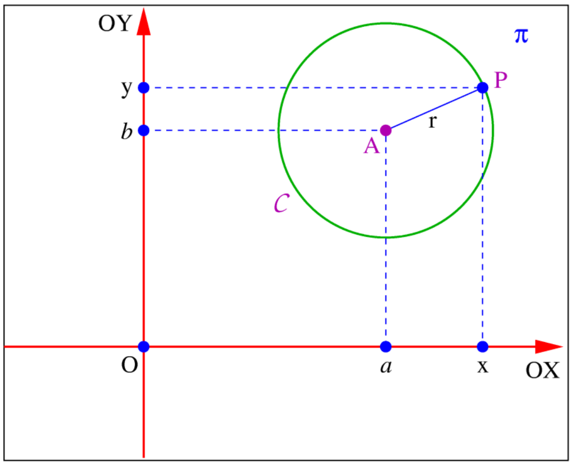

Fig. 16: Círculo de centro $A = (a,b)$ e raio $r > 0$.

Assim, associamos ao círculo C uma *equação* que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Uma vez obtida a equação, as propriedades geométricas do círculo podem ser deduzidas por métodos algébricos.

Exemplo 1

Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação:

(a) $C : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Completando os quadrados, obtemos:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0 + 4 + 9$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13.$$

Portanto, o círculo C tem centro no ponto $A = (2, -3)$ e raio $r = \sqrt{13}$.

(b) $C : x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$.

Completando os quadrados, obtemos:

$$x^2 + 3x + y^2 - 5y = -1$$
$$\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = -1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}.$$

Assim, C é o círculo de centro no ponto $A = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e raio $\frac{\sqrt{30}}{2}$.

Exemplo 2

Dados A e B dois pontos distintos do plano π, seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B, ou seja:

$$\boxed{\mathcal{R} = \{P \in \pi \mid d(P, A) = d(P, B)\}}$$

Vamos mostrar algebricamente que $\mathcal{R}$ é a **mediatriz do segmento $\overline{AB}$**, isto é, $\mathcal{R}$ é a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$.

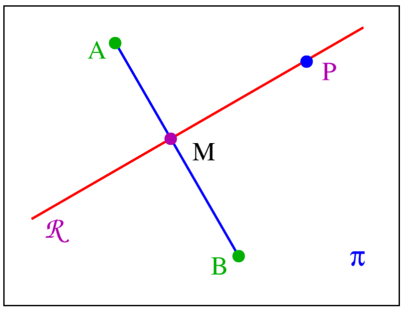

Fig. 17: Mediatriz e ponto médio de $\overline{AB}$.

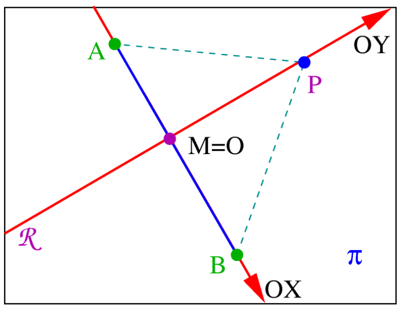

Fig. 18: Escolha do sistema de eixos OXY.

Para isso, escolhemos um sistema de eixos ortogonais OXY de modo que o eixo$-OX$ seja a reta que passa pelos pontos A e B, com origem no ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, orientada de modo que A esteja à esquerda de B (figura 18).

Nesse sistema de eixos, A e B têm coordenadas $(-x_0, 0)$ e $(x_0, 0)$, respectivamente, para algum número real $x_0 > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
P=(x,y)\in\mathcal{R} &\iff d(P,A)=d(P,B) \iff d(P,A)^2=d(P,B)^2\\
&\iff (x-(-x_0))^2+(y-0)^2=(x-x_0)^2+(y-0)^2\\
&\iff (x+x_0))^2+y^2=(x-x_0)^2+y^2\\
&\iff x^2+2xx_0+x_0^2+y^2=x^2-2xx_0+x_0^2+y^2\\
&\iff 2xx_0=-2xx_0 \iff 4xx_0=0 \iff x=0 \iff P\in \text{eixo}-OY\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x=0\}=\text{eixo}-OY$, que é, geometricamente a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio M desse segmento, como queríamos provar.

Observação 6

O exemplo anterior ilustra como métodos algébricos resolvem problemas geométricos.

Exemplo 3

Dado o ponto $P=(x,y)$, considere o ponto $P'=(-y,x)$.

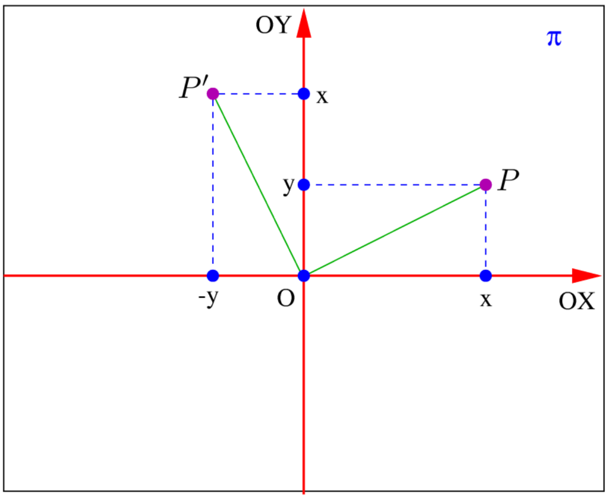

Fig. 19: Posição dos pontos P e P' no plano.

Primeiro observe que o triângulo $\triangle POP'$ é isósceles, pois:

$$\begin{cases} d(P,O)^2=(x-0)^2+(y-0)^2=x^2+y^2\\ d(P',O)^2=(-y-0)^2+(x-0)^2=y^2+x^2. \end{cases}$$

Além disso,

$$d(P,P')^2 = (-y-x)^2 + (x-y)^2 = y^2 + 2xy + x^2 + x^2 - 2xy + y^2$$
$$\Longrightarrow d(P,P')^2 = 2(x^2+y^2) \Longrightarrow d(P,P')^2 = d(P,O)^2 + d(P',O)^2 \,.$$

Pela lei dos cossenos, o triângulo isósceles $\triangle POP'$ é retângulo em O.

Isso significa que o ponto P' é obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.

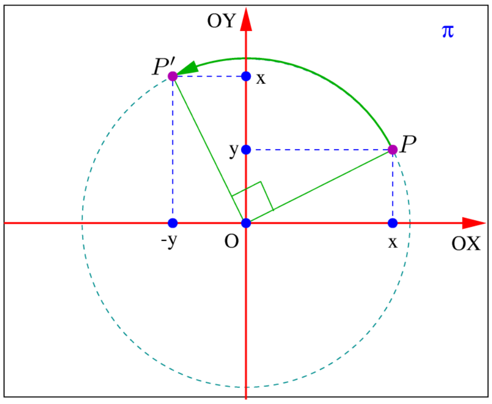

Fig. 20: P rotacionado de 90^o até coincidir com P'.

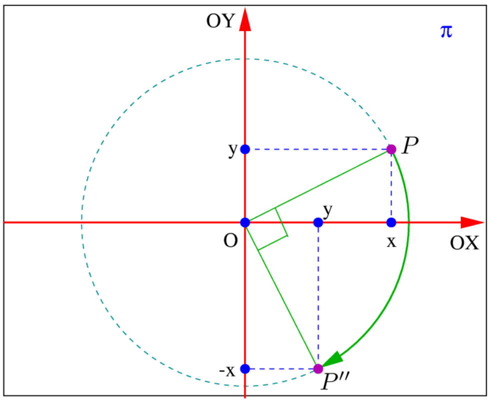

Fig. 21: P rotacionado de 90^o até coincidir com P''.

Consideremos agora o ponto $P'' = (y, -x)$. De maneira análoga, podemos provar que P'' é também obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o, no sentido oposto ao anterior, do segmento OP em torno da origem (Fig. 21).

Convencionamos que a rotação de 90^o que leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = (-y, x)$ tem **sentido positivo**, e que a rotação de 90^o que leva o ponto P no ponto P'' tem **sentido negativo**.

Exemplo 4

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e considere os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

Então,

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

é o **ponto médio** do segmento $\overline{P_1P_2}$.

De fato, sendo $M = (x_M, y_M)$, $Q_1 = (x_M, y_1)$ e $Q_2 = (x_M, y_2)$, os triângulos $\triangle P_1MQ_1$ e $\triangle P_2MQ_2$ são congruentes (critério AAL).

Logo,

$$\begin{aligned}
& \bullet\ d(P_1, Q_1) = d(P_2, Q_2) \\
\iff & |x_M - x_1| = |x_2 - x_M| \\
\iff & x_M \text{ é o ponto médio entre } x_1 \text{ e } x_2 \\
\iff & x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet\ d(Q_1, M) = d(Q_2, M) \\
\iff & |y_M - y_1| = |y_2 - y_M| \\
\iff & y_M \text{ é o ponto médio entre } y_1 \text{ e } y_2 \\
\iff & y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.
\end{aligned}$$

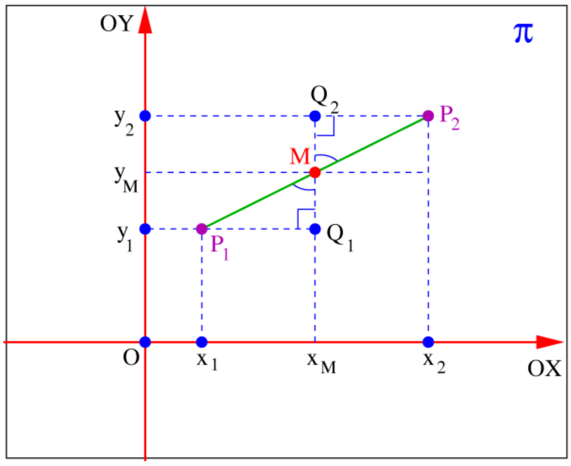

Fig. 22: M é o ponto médio do segmento P_1P_2.

Assim, as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{P_1P_2}$ são os pontos médios das respectivas coordenadas dos pontos P_1 e P_2.

4. Exercícios de revisão

1. Considere os pontos $A = (1, 0)$, $B = (3, 2)$, $C = (4, 4)$, $D = (-2, 3)$, $E = (-3, -5)$. Calculando apenas distâncias entre pontos do plano responda:

(a) Quais dos pontos C, D e E se encontram na região delimitada pelo círculo α que passa pelo ponto A e tem centro no ponto B?

(b) Quais dos pontos B, D e E se encontram na região delimitada pelo círculo β que passa pelo ponto C e tem centro no ponto A?

(c) Faça um esboço da situação para comprovar suas respostas.

2. **(a)** Seja $\mathcal{R}$ o retângulo de vértices consecutivos $ABDC$ (percorridos no sentido anti-horário). Sabendo que $A = (-1, 1)$ e $D = (2, 2)$ são vértices opostos e que $\mathcal{R}$ tem seus lados paralelos aos eixos coordenados, determine os vértices B e C. Verifique que as diagonais se intersectam ao meio. O retângulo $\mathcal{R}$ é um quadrado?

(b) Responda as questões do item (a) se $D = (\pi, 3\pi/2)$.

3. Determine a equação cartesiana do círculo de centro C e raio r onde:

(a) $C = (1,2)$, $r = \sqrt{3}$;

(b) $C = (1,-1)$, $r = \sqrt{11}$;

(c) $C = (1,0)$, $r = 2$;

4. Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação cartesiana:

(a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 - \sqrt{2} = 0$;

(b) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + 2x - 3y + 6 = 0$;

(c) $x^2 + y^2 - 2\pi x + 2\pi y + \pi^2 = 0$;

5. Um círculo C de raio $r > 0$ tem seu centro $A = (x_0, y_0)$ no primeiro quadrante do plano ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$). Determine as condições sobre os números x_0, y_0 e r de modo que C:

(a) não intersecte os eixos coordenados;

(b) intersecte o eixo-x em exatamente um ponto;

(c) intersecte o eixo-y em exatamente um ponto;

(d) intersecte o eixo-y em dois pontos;

(e) intersecte os eixos cartesianos em exatamente um ponto;

(f) intersecte o eixo-x em dois pontos e o eixo-y em um ponto;

(g) intersecte o eixo-x em exatamente um ponto e não intersecte o eixo-y;

6. Sejam A e B pontos arbitrârios no plano. Determine as coordenadas do ponto C, em termos das coordenadas dos pontos A e B obtido a partir do ponto B:

(a) por uma rotação de 90^o em torno do ponto A.

(b) por uma rotação de -90^o em torno do ponto A.

4.1. Respostas

1. (a) O raio do círculo α é $d(B,A) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Temos que $d(B,C) = \sqrt{5} < \sqrt{8}$, $d(B,D) = \sqrt{26} > \sqrt{8}$ e $d(B,E) = \sqrt{85} > \sqrt{8}$. Portanto, C se encontra na região delimitada por α. (b) O raio do círculo β é $d(A,C) = 5$. Temos que $d(A,B) = 2\sqrt{2} < 5$, $d(A,D) = 3\sqrt{2} < 5$ e $d(A,E) = \sqrt{41} > 5$. Portanto, B e D se encontram na região delimitada por β.

2. (a) $B = (2,1)$, $C = (-1,2)$; $M_{AD} = \frac{1}{2}(-1+2, 1+2) = \frac{1}{2}(1,3)$ e $M_{BC} = \frac{1}{2}(2+(-1), 1+2) = \frac{1}{2}(1,3)$, logo as diagonais AD e BC se intersectam ao meio. Como $d(A,B) = 3$ e $d(A,C) = 2$, o retângulo não é um quadrado. (b) $B = (\pi, 1)$, $C = (-1, 3\pi/2)$; $M_{AD} = \frac{1}{2}(-1+\pi, 1+3\pi/2)$ e $M_{BC} = \frac{1}{2}(\pi + (-1), 1 + 3\pi/2)$, logo as diagonais AD e BC se intersectam ao meio. Como $d(A,B) = \pi + 1 \neq d(A,C) = 3\pi/2 - 1$, o retângulo não é um quadrado.

3. **(a)** $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$; (b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$; (c) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

4. (a) $C = (-1,-3)$, $r = \sqrt{2}$; (b) $C = (-2,3)$, $r = 1$; (c) $C = (\pi, -\pi)$, $r = \pi$.

5. (a) $r < x_0$ e $r < y_0$; (b) $y_0 = r$; (c) $x_0 = r$; (d) $x_0 < r$; (e) $x_0 = y_0 = r$; (f) $y_0 < r = x_0$; (g) $y_0 = r < x_0$;

6. Indicação: transporte o problema para a origem, ou seja, resolva o problema com A =origem e $P = B - A$ para obter o ponto rotacionado P'. O ponto procurado será $B' = P' + A$.

Capítulo 2

Retas no plano

Nosso objetivo é determinar a equação algébrica que representa uma reta no plano. Para isso, vamos analisar separadamente dois tipos de reta: *reta vertical* e *reta não-vertical*.

1. Retas verticais e não-verticais

Definição 1

Uma reta r é **vertical** quando coincide com o eixo$-OY$ ou quando é paralela ao eixo$-OY$ (isto é, $r \cap \text{eixo} - OY = \emptyset$).

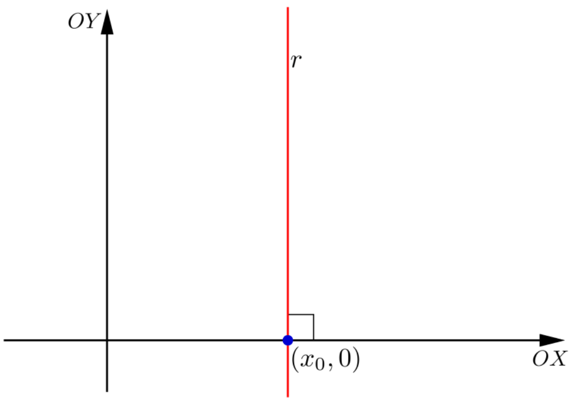

Fig. 1: r é vertical e a sua equação é $r : x = x_0$.

Note que todos os pontos pertencentes à reta vertical r têm a mesma abscissa, ou seja, se

$$r \cap \text{eixo} - OX = \{(x_0, 0)\},$$

então

$$r = \{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Neste contexto, dizemos que a equação da reta r é $x = x_0$ e escrevemos

$$\boxed{r : x = x_0}$$

Designamos por r_{x_0} a reta vertical que intersecta o eixo-OX no ponto de abscissa x_0.

Definição 2

Uma **função** $f : D \to \mathbb{R}$ definida num subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ é uma lei que a cada número real $x \in D$ associa um **único** número real $f(x)$, chamado a imagem de x pela função f.

O **gráfico** da função $f : D \to \mathbb{R}$ é o subconjunto $\mathbf{G}(f) \subset \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\boxed{\mathbf{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in D \text{ e } y = f(x)\}}$$

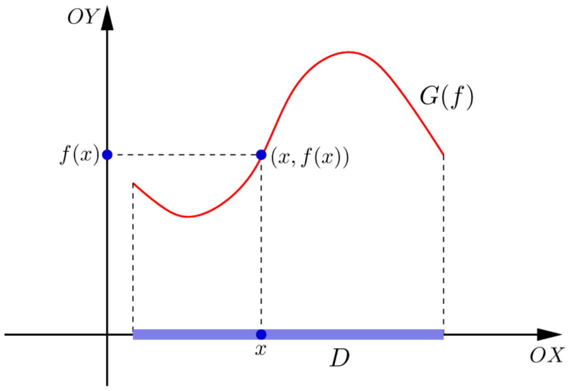

Fig. 2: Gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$.

Um critério para verificar se uma curva C no plano é o gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é:

Uma curva C no plano é o gráfico de uma função f se, e somente se, as retas verticais intersectam C em no máximo um ponto. Isto é:

$$C \text{ é gráfico de uma função } \iff \begin{cases} C \cap r_{x_0} = \emptyset \\ \text{ou} \\ C \cap r_{x_0} = \{P\}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ou, de modo equivalente:

C não é gráfico de uma função se, e só se, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, $C \cap r_{x_0}$ consistede dois ou mais pontos.

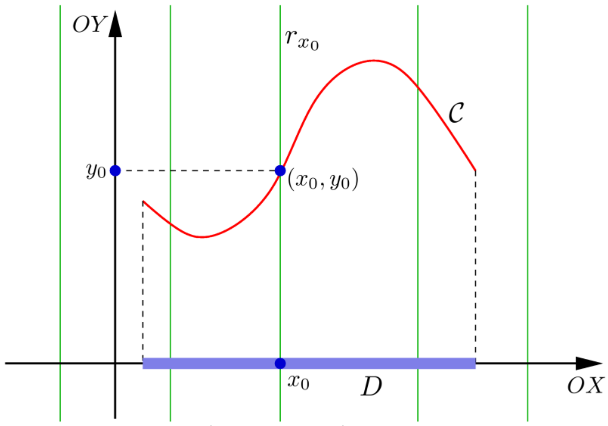

Fig. 3: A curva C é gráfico de uma função, pois as retas verticais intersectam a curva em exatamente um ponto ou em nenhum ponto.

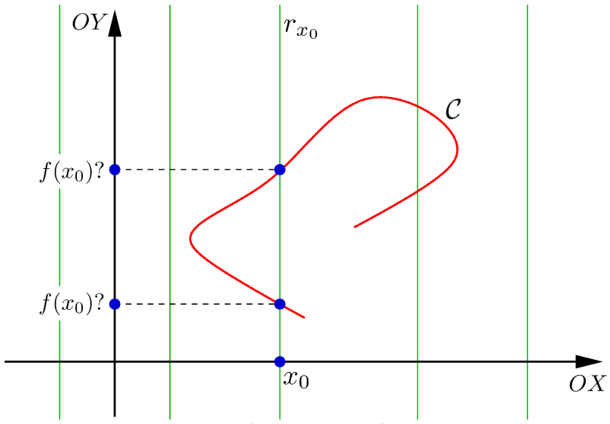

Fig. 4: A curva C **não** é gráfico de uma função, pois existem retas verticais que intersectam a curva em mais de um ponto.

De fato, se $C = \mathbf{G}(f)$, onde f é uma função de D em $\mathbb{R}$, então, para todo $x_0 \in D$, $r_{x_0} \cap C = \{(x_0, f(x_0))\}$, e para $x_0 \notin D$, $r_{x_0} \cap C = \varnothing$.

Reciprocamente: **se** C é uma curva que intersecta as verticais em no máximo um ponto e $D = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid r_{x_0} \cap C \neq \varnothing\}$, **então** C é o gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_0) = y_0$, onde (x_0, y_0) é o ponto de interseção de C com r_{x_0}, para todo $x_0 \in D$ (veja a figura 3).

Exemplo 1

Um círculo C de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$ **não é** o gráfico de uma função.

De fato, a interseção $C \cap r_a = \{(a, b - r), (a, b + r)\}$ do círculo C com a reta vertical $x = a$ possui dois pontos distintos.

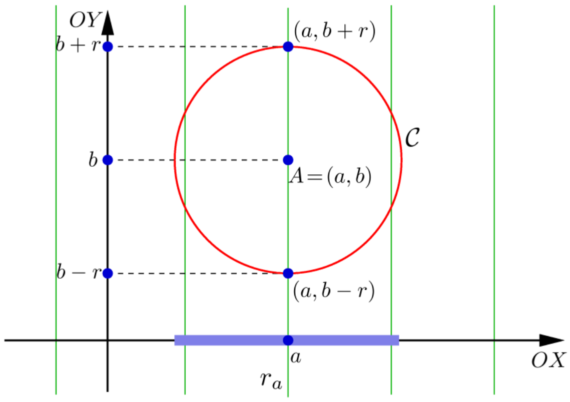

Fig. 5: Vertical $r_a : x = a$ intersectando $\mathcal{C}$ em mais de um ponto.

Exemplo 2

Uma *reta vertical* $r_{x_0} : x = x_0$ também não é gráfico de uma função, pois a interseção $r_{x_0} \cap r_{x_0} = r_{x_0} = \{(x_0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ possui uma quantidade infinita de pontos.

Exemplo 3

Uma reta *não-vertical* r é o gráfico de uma função f definida em todo o conjunto $D = \mathbb{R}$ dos números reais. De fato, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, a interseção $r \cap r_{x_0}$ possui um único ponto, pois, caso contrário, $r = r_{x_0}$ ou $r \cap r_{x_0} = \varnothing$, ou seja, r seria uma reta vertical.

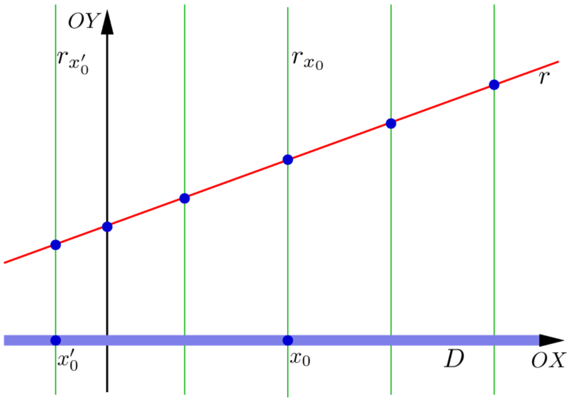

Fig. 6: Cada vertical intersecta a reta não-vertical r em um único ponto.

Definição 3

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **afim**, se para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais. Quando $b = 0$, a função diz-se também **linear**.

Teorema 1

O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical e, reciprocamente, toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim.

Prova.

• Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, uma função afim e seja

$$\mathbf{G}(f) = \{(x, ax + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

seu gráfico.

Para provar que $\mathbf{G}(f)$ é uma reta, basta verificar que três pontos quaisquer de $\mathbf{G}(f)$ são colineares.

Sejam $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ três pontos de $\mathbf{G}(f)$ tais que $x_1 < x_2 < x_3$.

Como

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\
&= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\
d(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_2 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 - ax_2)^2} \\
&= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}, \\
d(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2} \\
&= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2},
\end{aligned}$$

obtemos que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Portanto, P_1, P_2 e P_3 são colineares.

• Considere, agora, uma reta r não-vertical.

Devemos verificar que existem números reais a e b tais que $r = \mathbf{G}(f)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Para isso, tome b como sendo a ordenada do único ponto $(0, b)$ onde a reta r (que não é vertical) intersecta o eixo$-OY$ e seja $a = \dfrac{y_0 - b}{x_0}$, onde (x_0, y_0) é um ponto qualquer de r distinto de $(0, b)$.

Observe que $x_0 \neq 0$, pois, caso contrário, (x_0, y_0) pertenceria ao eixo $-OY$ e r seria, então, uma reta vertical.

Já provamos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, é uma reta não-vertical.

Como $f(0) = b$ e

$$f(x_0) = ax_0 + b = \frac{y_0 - b}{x_0} x_0 + b = y_0,$$

obtemos que $(0, b) \in \mathbf{G}(f)$ e $(x_0, y_0) \in \mathbf{G}(f)$.

Logo $r = \mathbf{G}(f)$, pois r e $\mathbf{G}(f)$ são duas retas que contêm os pontos $(0, b)$ e (x_0, y_0). ■

Observação 1

Toda reta r não-vertical se representa por uma equação do 1^o grau da forma $y = ax + b$, onde:

• b é a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo$-OY$. Se $b = 0$, então r passa pela origem.

• a é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta.

De fato, se $x_0 \neq x_1$, $y_0 = ax_0 + b$ e $y_1 = ax_1 + b$, então

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a\,.$$

• O número a chama-se **inclinação** da reta $r : y = ax + b$.

Além disso,

◇ **Se** $a > 0$, a função $y = ax + b$ é **crescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = ax_1 + b < y_2 = ax_2 + b$ (ver Fig. 7).

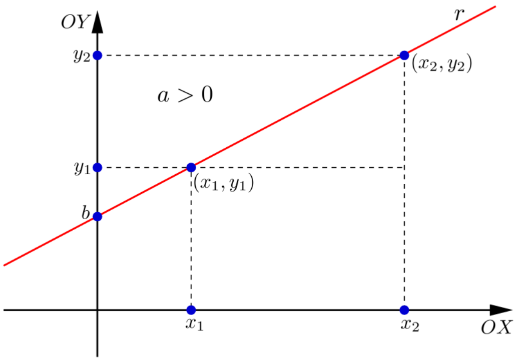

Fig. 7: Para $a > 0$, $y = ax + b$ é crescente.

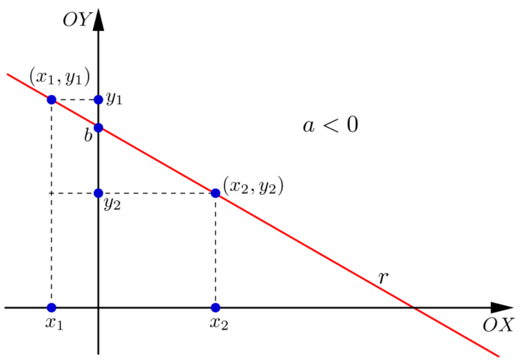

Fig. 8: Para $a < 0$, $y = ax + b$ é decrescente.

◇ **Se** $a < 0$, a função $y = ax + b$ é **decrescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = ax_1 + b > y_2 = ax_2 + b$ (ver Fig. 8).

$\diamond$ **Se** $a = 0$, a função $y = ax + b$ é **constante**, pois $y = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que $r : y = b$ é uma **reta horizontal**.

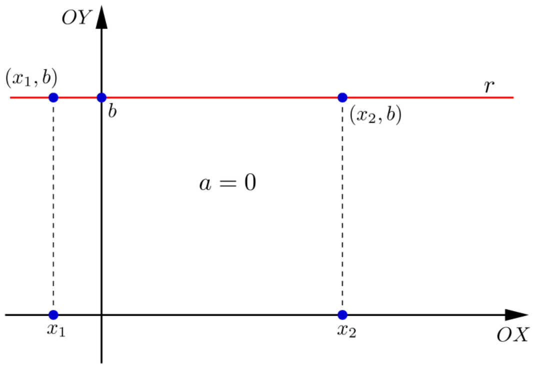

Fig. 9: Para $a = 0$, $y = ax + b$ é constante.

• Seja θ o ângulo que a reta $r : y = ax + b$ faz com o semi-eixo$-OX$ positivo. Então,

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = a}$$

De fato, veja as figuras 10, 11 e 12:

$$a = \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\theta.$$

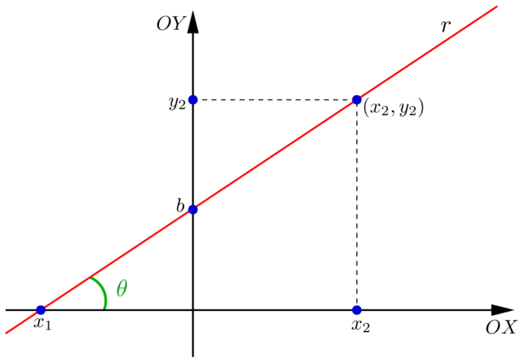

Fig. 10: Caso $0 < \theta < \frac{\pi}{2} = 90^o$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{0 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= -\operatorname{tg}(\pi - \theta) \ . \\ &= \operatorname{tg}\theta \end{aligned}$$

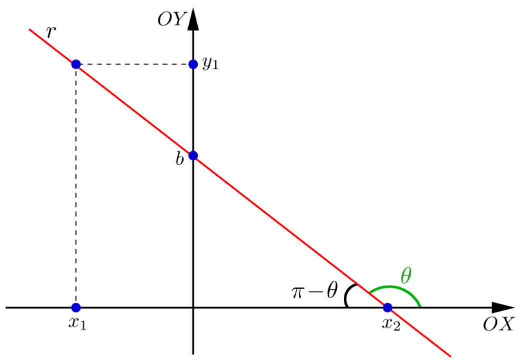

Fig. 11: Caso $\frac{\pi}{2} = 90^o < \theta < \pi = 180^o$.

$$\theta = 0 \Longrightarrow a = 0 = \operatorname{tg}\theta.$$

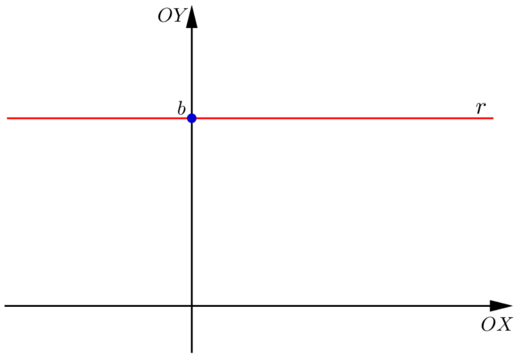

Fig. 12: Caso $\theta = 0 = 0^o$.

Exemplo 4

Determine as equações das retas que contêm os lados do triângulo de vértices nos pontos $A = (1,1)$, $B = (4,1)$ e $C = (1,3)$.

Solução.

• A reta r_1 que contêm o lado AC é vertical, pois A e C têm a mesma abscissa 1. Assim, $r_1 : x = 1$.

• A reta r_2 que contêm o lado AB é horizontal, pois A e B têm a mesma ordenada 1. Portanto, $r_2 : y = 1$.

• A reta r_3 que contêm o lado BC tem inclinação $a = \dfrac{3-1}{1-4} = -\dfrac{2}{3}$. Assim, a equação de r_3 é da forma:

$$r_3 : y = -\frac{2}{3}x + b.$$

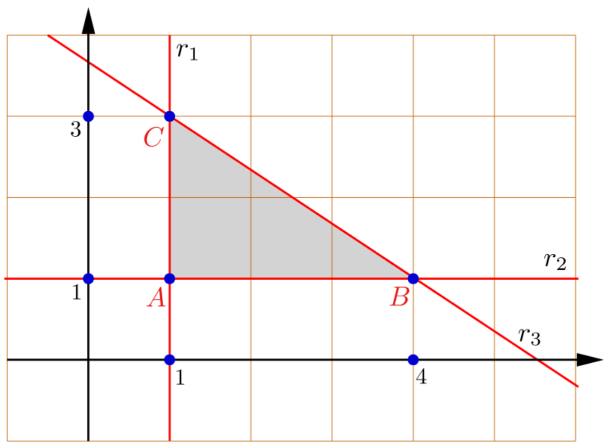

Fig. 13: Triângulo de vértices A, B e C.

Determinemos o valor de b: como $B = (4, 1) \in r_3$, temos, substituindo x por 4 e y por 1 na equação anterior:

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 4 + b \Longrightarrow b = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}.$$

Portanto,

$$r_3 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3},$$

é a equação da terceira reta. □

2. Retas paralelas

Definição 4

Se duas retas r e r' estão contidas num plano e não se intersectam, dizemos que são **paralelas**. Nesse caso escrevemos $r \parallel r'$.

Assim, se r e r' são retas contidas num plano, $r \parallel r' \Longleftrightarrow r \cap r' = \emptyset$.

Note que se $r \parallel r'$, então r é vertical se, e somente se, r' é vertical.

Proposição 1

Sejam $r : y = ax + b$ e $r' : y = a'x + b'$ duas retas não-verticais.

Então $r \parallel r'$ se, e somente se, $a = a'$ e $b \neq b'$.

Isto é, duas retas não-verticais são paralelas se, e somente se, têm a mesma inclinação e cortam o eixo$-OY$ em pontos diferentes.

Prova.

(a) Verifiquemos primeiro que se $r \parallel r'$, então $a = a'$ e $b \neq b'$.
Se $r \parallel r'$, então $b \neq b'$, pois, caso contrário, $(0, b) = (0, b') \in r \cap r'$, uma contradição, já que $r \cap r' = \emptyset$.
Além disso, $a = a'$, pois se $a \neq a'$, as ordenadas $ax_0 + b$ e $a'x_0 + b'$ dos pontos sobre as retas r e r' de abscissa $x_0 = \dfrac{b' - b}{a - a'}$, seriam iguais e, consequentemente, $r \cap r' \neq \emptyset$. De fato,

$$\begin{aligned}
ax_0 + b &= a\,\frac{b'-b}{a-a'} + b = \frac{a(b'-b)+b(a-a')}{a-a'} = \frac{ab'-ab+ab-a'b}{a-a'}\\
&= \frac{ab'-a'b}{a-a'} = \frac{ab'+a'b'-a'b'-a'b}{a-a'} = \frac{-a'b+a'b'+ab'-a'b'}{a-a'}\\
&= \frac{a'(b'-b)+b'(a-a')}{a-a'} = a'\,\frac{b'-b}{a-a'} + b'\,\frac{a-a'}{a-a'}\\
&= a'\,\frac{b'-b}{a-a'} + b' = a'\,x_0 + b'
\end{aligned}$$

(b) Suponhamos, agora, que $a = a'$ e $b \neq b'$, e verifiquemos que $r \parallel r'$. Como $b \neq b'$, temos $ax+b \neq ax+b'$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $r \cap r' = \varnothing$, isto é, r e r' são paralelas. ■

Exemplo 5

Determine a equação da reta r' que passa pelo ponto $A = (1,4)$ e é paralela à reta

$$r : y = 3x + 2.$$

Solução.

Como r' é paralela à reta não-vertical r, temos que r' é, também, não-vertical.

A equação de r' é da forma $r' : y = 3x + b'$, pois r e r' têm a mesma inclinação $a = 3$.

Além disso, como $A = (1,4) \in r'$, as coordenadas $x = 1$ e $y = 4$ desse ponto devem satisfazer a equação de r', isto é, $4 = 3 \cdot 1 + b'$. Portanto, $b' = 4 - 3 = 1$ e $r' : y = 3x + 1$ é a equação procurada. □

3. Retas perpendiculares

Duas retas são **perpendiculares** quando o ângulo entre elas é de 90^o (ou $\frac{\pi}{2}$ radianos). Quando r e r' são retas perpendiculares escrevemos $r \perp r'$.

Sejam r e r' retas perpendiculares. Se r é horizontal,

$$r : y = b,$$

então r' é vertical,

$$r' : x = c,$$

e vice-versa.

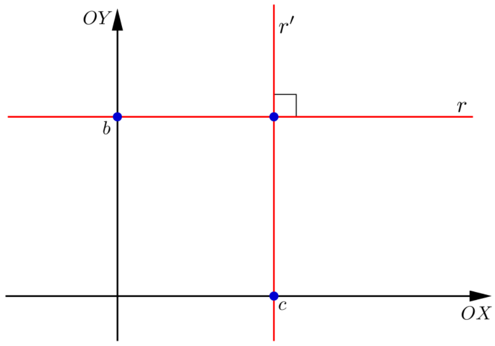

Fig. 14: Toda reta horizontal é perpendicular a toda reta vertical.

Proposição 2

Sejam r e r' retas não-verticais e não-horizontais. Isto é,

$$r : y = ax + b \quad e \quad r' : y = mx + n,$$

com $a \neq 0$ e $m \neq 0$.

Então r e r' são perpendiculares se, e somente se, $ma = -1$.

Prova.

• *Caso particular:* Suponhamos que r e r' passam pela origem, isto é, $r : y = ax$ e $r' : y = mx$.
Seja $P = (1, a) \in r$.
Observe que, fazendo uma rotação de 90^o em torno da origem, no sentido positivo, o ponto P vai cair sobre o ponto $P' = (-a, 1)$.
Logo as retas são perpendiculares se, e só se, o ponto P' pertence a r', isto é, as coordenadas de P' satisfazem a equação de r'. Assim,

$$r \perp r' \iff 1 = m\,(-a) \iff ma = -1.$$

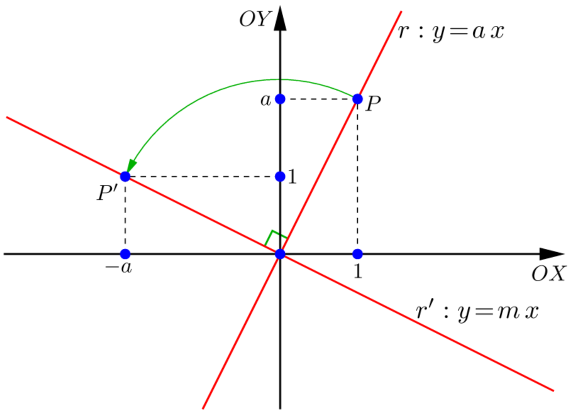

Fig. 15: Retas perpendiculares que se intersectam na origem.

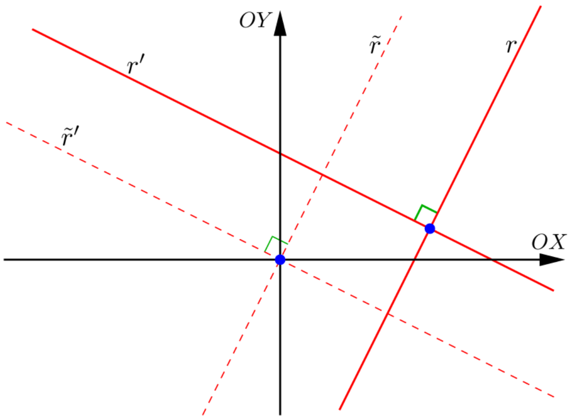

Fig. 16: Retas perpendiculares que não se intersectam na origem.

• *Caso geral:* Sejam $r : y = ax + b$ e $r' : y = mx + n$ retas perpendiculares. Consideremos as retas $\tilde{r} : y = ax$ e $\tilde{r}' : y = mx$ que passam pela origem e são paralelas, respectivamente, às retas r e r'.
Então, $r \perp r' \iff \tilde{r} \perp \tilde{r}' \iff ma = -1.$ ■

Exemplo 6

Determine a equação da reta r' que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta r, onde:

(a) $r : x = 2\,, \quad A = (5,3)\,;$ **(b)** $r : y = 4x + 5\,, \quad A = (4,1)\,.$

Solução.
(a) Como r é vertical, r' deve ser horizontal e a sua equação da forma $r' : y = b$.
Sendo que $A = (5,3) \in r'$, devemos ter $3 = b$ e, portanto, $r' : y = 3$.

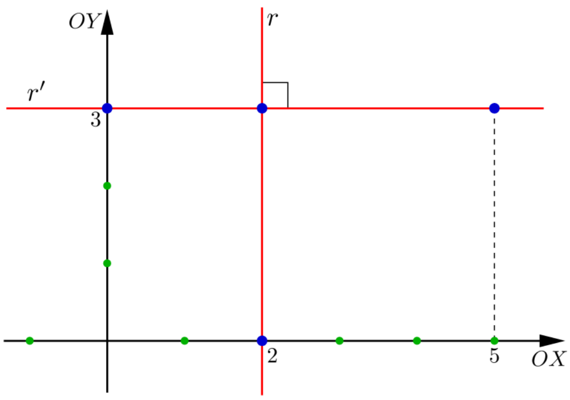

Fig. 17: Reta r' horizontal, $r' \perp r$, $A = (5,3) \in r'$.

(b) Como r é não-vertical e não-horizontal, a equação de r' deve ser da forma $r' : y = ax + b$, com $4a = -1$ e b por determinar. Isto é, $a = -\dfrac{1}{4}$ e $r' : y = -\dfrac{1}{4}x + b$.

Para determinar o valor de b usamos que $A = (4, 1) \in r'$. Ou seja, as coordenadas de A devem satisfazer a equação de r':

$$1 = -\frac{1}{4} \cdot 4 + b \Longrightarrow b = 2\,.$$

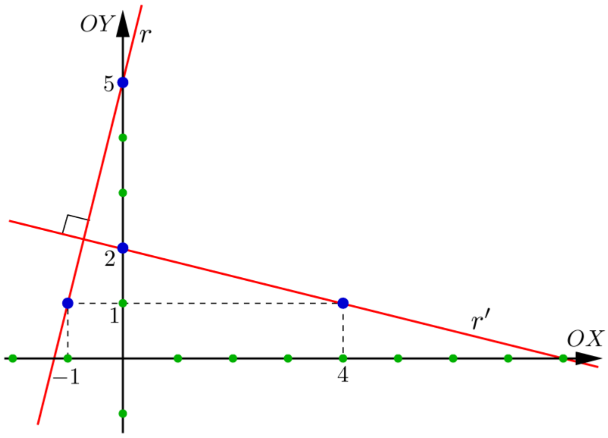

Fig. 18: Reta $r : y = 4x + 5$, $\quad r' \perp r$, $A = (4, 1) \in r'$.

Assim, $r' : y = -\dfrac{1}{4}x + 2$ é a equação procurada de r'. $\square$

Exemplo 7

Determine a mediatriz do segmento AB, onde $A = (1, 5)$ e $B = (5, 3)$

Solução.

A reta r que passa pelos pontos A e B é não-vertical e tem inclinação

$$a = \frac{3-5}{5-1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Então $r : y = -\dfrac{1}{2}x + b$.

Como $A = (1, 5) \in r$, temos $5 = -\dfrac{1}{2} \cdot 1 + b$, isto é, $b = 5 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{2}$.

Portanto, $r : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{2}$.

A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta r' que passa pelo ponto médio M de AB e é perpendicular a r. Então a reta r' tem inclinação $m =$

$-\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{-1/2} = 2$ e sua equação é $r' : y = 2x + b$. Além disso, como $M = \left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{5+3}{2}\right) = (3,4) \in r'$, $4 = 2 \cdot 3 + b$, ou seja, $b = 4 - 6 = -2$. Portanto, a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é $r' : y = 2x - 2$. □

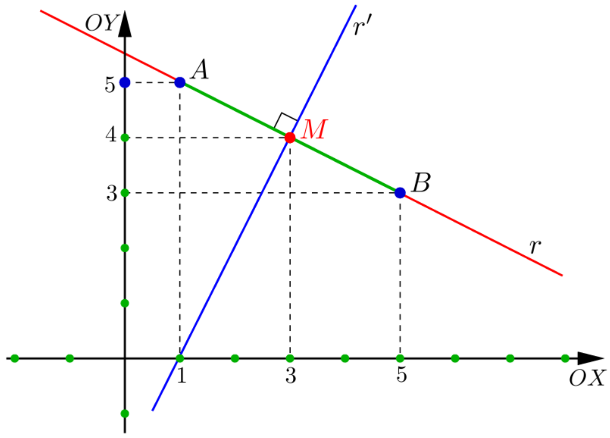

Fig. 19: Mediatriz r' do segmento AB.

4. Equação cartesiana da reta

Consideremos o plano munido de um sistema de eixos ortogonais OXY. Uma reta r no plano pode ser:

• *Vertical* quando coincide com o eixo$-OY$ ou é paralela a esse eixo. Nesse caso, a equação de r é $x = d$, onde $d \in \mathbb{R}$ é uma constante. Mais precisamente, a reta r, caracterizada pelo número $d \in \mathbb{R}$, é o conjunto

$$\boxed{r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x = d\}}$$

• *Não-vertical*. Nesse caso, existem $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $r : y = mx + n$, ou seja, a reta r é o conjunto

$$\boxed{r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid mx - y = -n\}}$$

Assim, é fácil verificar que toda reta r do plano se expressa na forma:

$$\boxed{r : ax + by = c} \tag{1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo a e b não ambos iguais a zero. A equação (1) é a **equação cartesiana** da reta r.

Reciprocamente, dada a equação (1), onde a e b não são simultaneamente nulos, temos que:

(a) se $b = 0$, então r é uma reta vertical e sua equação é $r : x = \frac{c}{a}$ (lembre que se $b = 0$, então, necessariamente, $a \neq 0$).

Note que, se fizermos variar c em $\mathbb{R}$, mantendo $a \neq 0$ fixo na equação $x = \frac{c}{a}$, obtemos todas as retas verticais possíveis.

(b) se $b \neq 0$, então a equação (1) representa uma reta não-vertical e se escreve na forma:

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Isto é, r é não-vertical, tem inclinação $m = -\frac{a}{b}$ e corta o eixo$-OY$ no ponto $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.

Observe que, variando a e c em $\mathbb{R}$ e mantendo $b \neq 0$ fixo, a equação $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ representa todas as retas não-verticais do plano.

Assim, *a equação (1), onde pelo menos um dos coeficientes a ou b é diferente de zero, representa todas as retas do plano.*

Exemplo 8

Determine a equação cartesiana das retas perpendiculares à reta r que passa pelos pontos $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 3)$.

Solução.

A reta r tem inclinação $m = \frac{3-0}{-1-1} = -\frac{3}{2}$. As retas perpendiculares a r devem, portanto, ter inclinação $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-3/2} = \frac{2}{3}$. Logo a equação de uma reta perpendicular a r é

$$r'_d : y = \frac{2}{3}x + d.$$

Variando $d \in \mathbb{R}$ obtemos a equação de qualquer reta perpendicular à reta r.

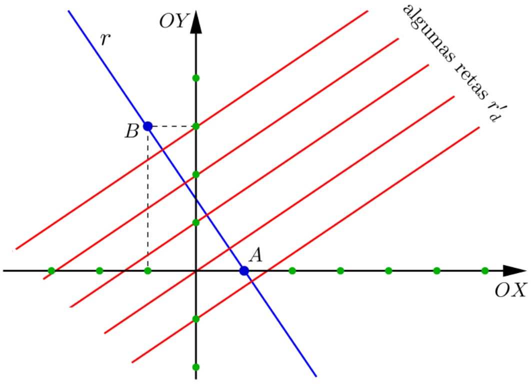

Fig. 20: Reta passando pelos pontos A e B e algumas retas da família $r'_d : 2x - 3y = c$, (exemplo 8).

Escrevemos o valor d como sub-índice em r'_d para indicar que a reta em questão depende do valor d. Ou seja, mudar o valor de d significa considerar outra reta, também perpendicular a r.

A equação da reta r'_d se escreve na forma cartesiana como:

$$r'_d : -\frac{2}{3}x + y = d\,, \qquad \text{ou, ainda,} \qquad r'_d : 2x - 3y = -3d\,.$$

Nessa equação, d é um número real qualquer, assim como $-3d$. Portanto, fazendo $c = -3d$, a equação da reta pode ser escrita na forma:

$$r'_d : 2x - 3y = c\,,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. □

Observação 2

• A condição de que pelo menos um dentre dois números a e b seja diferente de zero é equivalente a $a^2 + b^2 \neq 0$.

• Se $ax + by = c$ é uma reta, e $\lambda \neq 0$ é um número real, então a equação $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$ representa a mesma reta, pois, se um ponto (x, y) do plano verifica uma dessas equações, então, necessariamente, verifica a outra.

Observação 3

A equação cartesiana da reta r que corta o eixo-horizontal no ponto de abscissa a e o eixo-vertical no ponto de ordenada b, com a e b diferentes de zero, é $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

De fato, como $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$ são pontos distintos e a equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ representa uma reta que passa por A e B, concluimos que a equação de r é exatamente $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, pois por dois pontos distintos passa uma única reta.

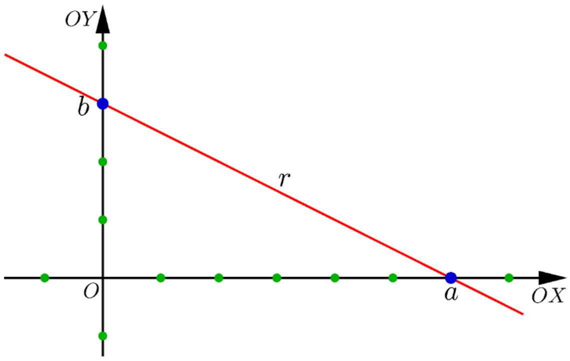

Fig. 21: Reta passando pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

Exemplo 9

Uma reta r que passa pelo ponto $P = (2, 4/3)$ forma com os semi-eixos coordenados positivos um triângulo de perímetro 12. Determine sua equação.

Solução.

Sejam a e b números reais positivos tais que

$$\{(a, 0)\} = r \cap \text{eixo} - OX \quad \text{e} \quad \{(0, b)\} = r \cap \text{eixo} - OY.$$

Pela observação anterior, $r : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ é a equação cartesiana de r.

Como $P = (2, 4/3) \in r$, temos:

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{3b} = 1 \iff 6a + 4a = 3ab.$$

Além disso, o perímetro do triângulo $\triangle AOB$ é 12, ou seja:

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12\,,$$

onde $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$.

Temos então, que resolver o sistema

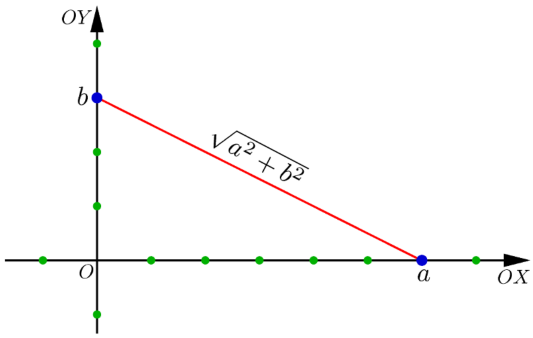

Fig. 22: Reta passando pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

$$\begin{cases} 6a + 4b = 3ab \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12\,. \end{cases} \tag{2}$$

Elevando ao quadrado a segunda equação, obtemos que:

$$\begin{aligned}
& a^2+b^2=(12-(a+b))^2 \\
\iff & a^2+b^2=144-24(a+b)+(a^2+2ab+b^2) \\
\iff & 24(a+b)=144+2ab \\
\iff & 12(a+b)=72+ab\,.
\end{aligned}$$

Assim, o sistema (2) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 12(a+b)=72+ab \\ 4a+6b=32ab\,. \end{cases} \iff \begin{cases} -36(a+b)=-3\cdot 72-3ab \\ 4a+6b=3ab \end{cases} \tag{3}$$

Somando as duas equações, obtemos que:

$$-32a-30b=-3\cdot 72 \iff 16a+15b=108 \iff b=\frac{108-16a}{15} \tag{4}$$

Substituindo $b=\dfrac{108-16a}{15}$ na equação $6b+4a=3ab$, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{6}{15}(108-16a)+4a=\frac{3}{15}a(108-16a) \\
\iff & 6(108-16a)+60a=3a(108-16a) \\
\iff & 2(108-16a)+20a=-16a^2+108a \\
\iff & 16a^2-108a-32a+20a+216=0 \\
\iff & 16a^2-120a+216=0 \\
\iff & 2a^2-15a+27=0 \\
\iff & a=\frac{15\pm\sqrt{225-216}}{4}=\frac{15\pm\sqrt{9}}{4} \\
\iff & a=\frac{18}{4}=\frac{9}{2} \text{ ou } a=3\,.
\end{aligned}$$

Portanto, se $a_1=9/2$, então, por (4),

$$b_1=\frac{108-16\cdot 9/2}{15}=\frac{108-72}{15}=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}\,,$$

e a equação da reta r_1 é $\dfrac{2x}{9}+\dfrac{5y}{12}=1 \iff 8x+15y=36$.

Se $a_2=3$, então $b_2=\dfrac{108-16\cdot 3}{15}=\dfrac{60}{15}=4$, e a equação da reta r_2 é $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1 \iff 4x+3y=12$.

Assim, o problema tem duas soluções:

$$r_1 : 8x + 15y = 16 \quad \text{e} \quad r_2 : 4x + 3y = 12. \square$$

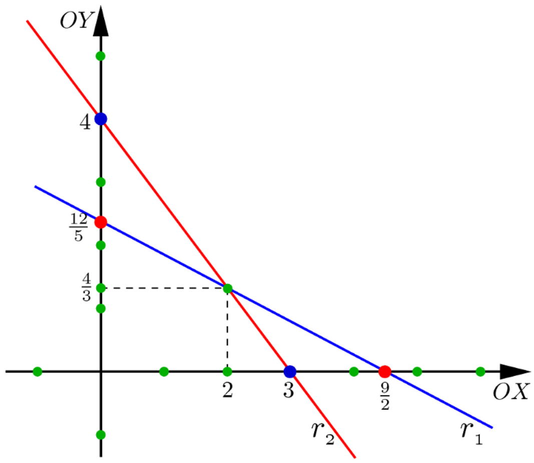

Fig. 23: Retas r_1 e r_2.

5. Exercícios de revisão

1. Sejam $A = (-1, -2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (1, 4)$.

(a) Determine as equações das retas que contêm os pontos A, B e C.

(b) Determine as equações das retas que contêm os pontos médios C', B' e A' dos segmentos AB, AC e BC, respectivamente. Qual a relação entre as inclinações dessas retas e as retas do item anterior?

(c) Sejam P, Q e R pontos não-colineares do plano. Verifique que os lados do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos segmentos PQ, PR e QR são paralelos aos lados do triângulo $\triangle PQR$.

Indicação: dados os pontos não-colineares P, Q e R escolha um sistema ortogonal de coordenadas de modo que $P = (p, 0)$, $Q = (0, q)$ e $R = (r, 0)$, com $p < 0 < r$. Basta comparar a inclinação da reta que contém o lado PR com a inclinação da reta que contém o segmento R', P', onde R' é o ponto médio de PQ e P' é o ponto médio de QR.

2. Determine a mediatriz do segmento AB, onde $A = (2, 3)$ e $B = (5, 4)$.

3. Determine a equação da reta paralela à reta $y = 2x + 1$ que passa pelo ponto médio do segmento AB, onde $A = (1, -1)$ e $B = (2, 3)$.

4. Verifique que as interseções das retas $5x - y - 6 = 0$, $x + 5y = 22$, $5x - y = 32$ e $x + 5y + 4 = 0$ são os vértices de um quadrado.

5. Uma reta que passa pela interseção das retas $7x - 2y = 0$ e $4x - y = 1$ é perpendicular à reta $3x + 8y = 19$. Determine sua equação.

6. Determine a equação da reta:

(a) paralela à reta $2x + 5y = 1$ que passa pelo ponto $(1, 2)$.

(b) perpendicular à reta $y = 3x + 1$ que passa pelo ponto $(-3, 1)$.

(c) perpendicular à reta $x = 3$ que passa pelo ponto $(2, 0)$.

7. Sabendo-se que o círculo C tem seu centro no ponto $A = (1, 3)$ e passa pelo ponto $P = (1, -1)$, dê a equação da reta r tangente a C que passa pelo ponto P, isto é, a reta r que passa por P e é perpendicular ao segmento AP. Determine, também, a outra reta tangente a C paralela a r.

8. Seja C o círculo de centro no ponto $A = (0, 3)$ e raio 1.

(a) Determine as retas tangentes ao círculo C que passam pela origem. Isto é, se r é uma reta que passa pela origem e é tangente a C no ponto $Q \in C$, então r é perpendicular ao segmento AQ. Este tipo de situações será mais explorada no capítulo seguinte.

(b) Por simetria, determine as retas tangentes ao círculo C que passam pelo ponto $(0, 6)$.

9. Verifique que os pontos $P = (2, 5)$, $Q = (8, -1)$ e $R = (-2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

10. Sejam r uma reta no plano e P um ponto que não pertence a r. Seja $Q \in r$ o ponto onde a reta $r^\perp$ perpendicular a r que passa por P intersecta r. O *simétrico* ou *refletido* do ponto P em relação a uma reta r é o ponto $P' \in r^\perp$ tal que $d(P, Q) = d(P', Q)$. Determine:

(a) o simétrico do ponto $P = (a, b)$ em relação à reta $r : y = 2x + 1$.

(b) a reta $\tilde{s}$ simétrica da reta $s : y = 4x - 3$ em relação à reta $r : y = 2x + 1$.

5.1. Respostas

1. (a) As retas são $r_{AB} : y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, $r_{AC} : y = 3x + 1$, $r_BC : y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$. (b) $C' = (1, -1/2)$, $B' = (0, 1)$ e $A' = (2, 5/2)$ são os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente. As retas são: $r_{A'B'} : y = \frac{3}{4}x + 1$; $r_{A'C'} : 3x - \frac{7}{2}$; $r_{B'C'} : y = -\frac{3}{2}x + 1$, paralelas, respectivamente, às retas r_{AB}, r_{AC} e r_{BC} pois tem as inclinações correspondentes iguais. (c) Desenvolva a indicação.

2. $y = -3x + 14$.

3. $y = 2x - 2$.

4. Quadrado de lado $\sqrt{26}$ e vértices $(2, 4)$, $(7, 3)$, $(1, -1)$ e $(6, 2)$.

5. $8x - 3y = -5$.

6. (a) $2x + 5y = 12$. (b) $x + 3y = 0$. (c) $y = 0$.

7. $r : y = -1$, a outra reta é $y = 7$.

8. (a) As retas r_1 e r_2 procuradas passam pela origem e pelos pontos $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{8}{3}\right)$, respectivamente. Logo, $r_1 : y = 2\sqrt{2}x$ e $r_2 : y = -2\sqrt{2}x$. (b) Por simetria, as retas r_3 e r_4 que passam pelo ponto $(0, 6)$ e são tangentes ao círculo C passam pelos pontos $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{10}{3}\right)$ e $\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, \frac{10}{3}\right)$, respectivamente. Logo, $r_3 : y = -2\sqrt{2}x + 6$ e $r_4 : y = 2\sqrt{2}x + 6$.

9. O triângulo $\triangle PQR$ é retângulo no vértice P, a inclinação do lado PQ é -1 a do lado PR é 1.

10. (a) $\left(\frac{4b-3a-4}{5}, \frac{3b+4a+2}{5}\right)$. (b) $\tilde{s} : 13x - 16y = 33$.