# Cálculo Vetorial - Lista de Exercícios

(Organizada pela Profa. Ilka Rebouças)

1. Esboçar o gráfico das curvas representadas pelas seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{a}(t) = (4-t)\vec{i} + (2t)\vec{j},\ \ t \in [0,2]$.

b) $\vec{b}(t) = 2\,\text{sen}(t)\vec{i} + 4\vec{j} + 3\cos(t)\vec{k},\ \ t \in [0,2\pi]$.

c) $\vec{c}(t) = \vec{i} + t\vec{j} + (1-t^2)\vec{k},\ \ t \in \Re$.

d) $\vec{d}(t) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + t\vec{k},\ \ t \in \Re$.

e) $\vec{e}(t) = 2t\vec{i} + 2\vec{j} + 4t^2\vec{k},\ \ t \in \Re$

2. Seja $\vec{f}(t) = \vec{a}\,t + \vec{b}\,t^2$ e $\vec{g}(t) = t\,\vec{i} + \text{sen}t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$, com $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\,\vec{i} - \vec{j}$ ; $0 \le t \le 2\pi$.

Calcule: a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$. b) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$.

3. Uma partícula se desloca no espaço. Em cada instante t (t>2) o seu vetor posição é dado por $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \dfrac{1}{t-2}\,\vec{j} + \vec{k}$.

a) Esboce a trajetória da partícula e determine a posição da partícula nos instantes t = 3;
b) Quando t se aproxima de 2, o que ocorre com a posição da partícula?

4. Calcule:

a) $\lim\limits_{t \to -2} \left[ \dfrac{t^3 + 4t^2 + 4t}{t^2 - t - 6}\,\vec{i} + \vec{j} \right]$

b) $\lim\limits_{t \to 1} \left[ \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t-1}\,\vec{i} + (t-1)\,\vec{j} + (t+1)\,\vec{k} \right]$

5. Determinar a derivada das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \cos^3(t)\,\vec{i} + \text{tg}(t)\,\vec{j} + \text{sen}^2(t)\,\vec{k}$

b) $\vec{f}(t) = \text{sen}(t)\cos(t)\,\vec{i} + e^{-2t}\,\vec{j}$

c) $\vec{f}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + \left(1/e^{2t}\right)\vec{j} + \vec{k}$

d) $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{5t-2}{2t+1}\right)\vec{i} + \ln\left(1-t^2\right)\vec{j} + 5\,\vec{k}$

6. Determine as equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de r(t) no ponto em que $t = t_o$

a) $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + (2 - \ln t)\,\mathbf{j}$; $t_o = 1$; b) $\mathbf{r}(t) = 2\cos\pi t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\pi t\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$; $t_o = 1/3$

7. Seja $\vec{r}(t) = 2\cos(t)\,\vec{i} + 5\,\text{sen}(t)\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ o vetor posição de uma partícula em movimento no espaço. Determine os vetores velocidade e aceleração para qualquer instante $t$. Determinar, ainda, o módulo destes vetores no instante $t = \pi/4$.

8. Se $\vec{r}(t) = \cos(3t)\,\vec{i} + \text{sen}(3t)\,\vec{j}$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, mostrar que o vetor velocidade da partícula é *perpendicular* a $\vec{r}(t)$.

9. Um ponto move-se sobre uma curva C de modo que o vetor posição $\vec{r}(t)$ é igual ao vetor tangente $\vec{r}\,'(t)$, para todo t. Encontre as equações paramétricas de C.

10. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes é importante saber se eles vão colidir. Por exemplo, um míssil vai atingir seu alvo? Duas aeronaves vão colidir? As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição **no mesmo instante t.**

Suponha que as trajetórias de duas partículas $P_1$ e $P_2$ sejam dadas respectivamente pelas seguintes funções vetoriais $\vec{r}_1(t) = t^2\,\vec{i} + (7t-12)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$ e $\vec{r}_2(t) = (4t-3)\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + (5t-6)\,\vec{k}$.

a) Encontre o instante em que as duas partículas colidem e a posição nesse instante.
b) Calcule o vetor velocidade de $P_1$ e o vetor aceleração de $P_2$ no instante da colisão.

11. Calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_o)$ sendo dados:

a) $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$, $P_0\,(1,1)$ e $\vec{u} = (3, 4)$;

b) $f(x,y) = \text{arctg}\,\dfrac{x}{y}$; $P_0\,(3, 3)$ e $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; $P_0\,(3, 2)$ e $\vec{u} = \dfrac{5}{13}\vec{i} + \dfrac{12}{13}\vec{j}$.

d) $f(x,y) = \sqrt{xy}$; $P_0 = (1,4)$ e $\vec{u}$ é o vetor que faz ângulo $\theta = \pi/3$ com o eixo OX;

e) $f(x,y) = \text{tg}(2x + y)$; $P_0 = (\pi/6, \pi/3)$ $\vec{u}$ é o vetor que faz ângulo $\theta = 7\pi/4$ com o eixo OX;

f) $f(x,y,z) = x^3 y^2 z$; . $P_0\,(1, 1, 1)$ e $\vec{u} = (1, 0, -1)$;

g) $f(x,y,z) = y^2 \ln(x) + z^2$; $P_o(1, 4, 1)$; $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

12. Determine o vetor posição $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ de uma partícula em movimento sabendo que o vetor tangente em cada ponto da sua trajetória é igual a $\nabla f$, sendo $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ e que no instante inicial do movimento a partícula se encontrava no ponto ( 1,1).

13. Determine o gradiente de *f* no ponto indicado:

a) $f(x,y) = (x^2 + xy)^3$ $P(-1,-1)$;

b) $f(x,y) = y\ln(x + y)$ $P(-3,4)$.

14. Esboce a curva de nível de *f* que passa por *P* e desenhe o vetor gradiente em *P*.

a) $f(x,y) = 4x - 2y + 3$; $P(1,2)$;

b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$; $P(-2,0)$.

15. Uma chapa de metal está situada em um plano xy, de modo que a temperatura T em (x,y) seja inversamente proporcional à distância da origem, e a temperatura em P(3,4) é $100^{o}$ F.

a) Ache a taxa de variação de T em P na direção de i+j;
b) Em que direção T aumente mais rapidamente em P?
c) Em que direção T decresce mais rapidamente em P?
d) Em que direção a taxa de variação é nula?

16. Se um potencial elétrico em um ponto (x,y) do plano xy é V(x,y) então o **vetor de intensidade elétrica** em um ponto (x,y) é $E = -\nabla V(x,y)$. Suponha que $V(x,y) = e^{-2x}\cos(2y)$. Determine o vetor intensidade elétrica em $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ e verifique que, em cada ponto do plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor *E*.

17. O potencial elétrico V em um ponto P(x,y,z) num sistema de coordenadas retangulares é dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Determine a taxa de variação de V em P(2, −1, 3) na direção de P para a origem. Determine a direção e sentido que produz taxa máxima de variação de V em P. Qual a taxa máxima de variação em P?

18. Determine div **F** e rot **F** nos seguintes casos

a) F(x,y,z) = $x^2$ **i** $-2$**j** + yz **k**

b) F(x,y,z) = $7y^3z^2$ **i** – $8x^2z^5$ **j** $-3xy^4$ **k**

c) $F(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\,i + y\,j + z\,k)$

d) F(x,y,z) = $x^2z$ **i** + $y^2x$ **j** + ( y + 2z ) **k**

19. Sendo $F(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ e $G(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$, calcule $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$

20. Sendo $F(x,y,z) = \text{senx}\,\mathbf{i} + \cos(x - y)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, calcule $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$

21. Sendo $F(x,y,z) = xy\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, calcule $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$

22. Define-se o operador $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Se $\nabla^2$ opera sobre f(x,y,z) produz uma função escalar chamada de ***Laplaciano de f***, dada por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Mostre que o Laplaciano da função $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$ é zero, ou seja, a função satisfaz a ***equação de Laplace*** $\nabla^2 = 0$.

Funções que satisfazem a ***equação de Laplace*** são chamadas de ***funções harmônicas*** e desempenham papel importante nas aplicações físicas.

23. Ache um campo vetorial conservativo que tenha o potencial indicado

a) $f(x,y) = \text{arctg}(xy)$; b) $f(x,y,z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$; c) $f(x,y,z) = \text{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$

24. Confirme que u(x,y) é uma função potencial de F

a) $u(x,y) = 2y^2 + 3x^2y - xy^3$ e $F(x,y) = (6xy - y^3)\,\mathbf{i} + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\,\mathbf{j}$.

b) $u(x,y,z) = x\,\text{senz} + y\,\text{senx} + z\,\text{seny}$ e $F(x,y,z) = (\text{senz} + y\cos x)\,\mathbf{i} + (\text{senx} + z\cos y)\,\mathbf{j} + (x\cos z + \text{seny})\,\mathbf{k}$.

25. Verifique se os campos vetoriais são conservativos e em caso afirmativo determine uma função potencial para os mesmos

a) $F(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

b) $F(x,y) = x^2\,\mathbf{i} + 5xy^2\,\mathbf{j}$

c) $F(x,y) = (\cos y + y\cos x)\mathbf{i} + (\text{senx} - x\,\text{seny})\,\mathbf{j}$

d) $\vec{f} = (2x^2y^2z, 3x^2y^2z, x^2y^3 + y)$

e) $\vec{f} = (y\cos xy + ye^{xy})\,\vec{i} + (x\cos xy + xe^{xy})\,\vec{j} + \vec{k}$

f) $\vec{f} = (yz + \cos x)\,\vec{i} + (xz - \text{seny})\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$

26. Calcule $\int_C (x^3 + y)ds$, sendo C: $x = 3t$; $y = t^3$; $0 \le t \le 1$

27. Seja C a curva dada pelas equações $x = 2t$; $y = 3t^2$ ($0 \le t \le 1$). Calcule as seguintes integrais de linha ao longo de C:

a) $\int_C (x - y)dx$

b) $\int_C (x - y)dy$

28. Calcule as seguintes integrais curvilíneas ao longo de C

a) $\int_C 6x^2y\,dx + xy\,dy$ — C é o gráfico de $y = x^3 + 1$ de $(-1,0)$ a $(1,2)$.

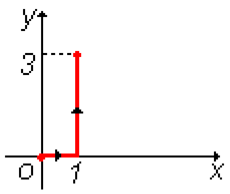
b) $\int_C (x - y)dx + x\,dy$ — C é o gráfico de $x = y^3$ de $(0,0)$ a $(1,1)$.

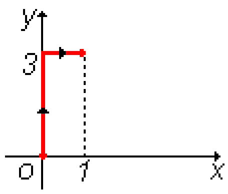
c) $\int_C xz\,dx + (y + z)dy + x\,dz$ — C é o gráfico de $x = e^t$; $y = e^{-t}$; $z = e^{2t}$ $0 \le t \le 1$.

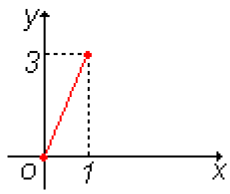
d) $\int_C (2x - y + z)ds$ — C é o segmento de reta que liga A(1,2,3) a B(2,0,1).

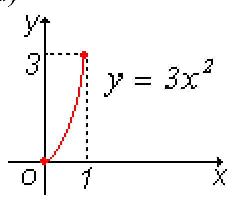
e) $\int_C (x + y + z)ds$ — C é o quadrado de vértices (1,0,1), (1,1,1), (0,1,1) e (0,0,1).

29. Calcule $\int_C (xy)dx + (x+y)dy$ ao longo de cada curva C abaixo de (0,0) até (1,3).

a)



b)



c)



d)



30. Se a força em (x, y) é dada por $F(x,y) = xy^2\ i + x^2y\ j$ , encontre o trabalho realizado por F ao longo das curvas do exercício 27 a) e d)

31. A força em um ponto (x,y,z) é dada por $F(x,y,z) = y\ i + z\ j + x\ k$ . Ache o trabalho realizado por F(x,y,z) ao longo da cúbica reversa $x = t$; $y = t^2$; $z = t^3$ de ( 0,0,0) até (2,4,8)

32.

a) Mostre que a integral de linha $\int_C y^2dx + 2xydy$ é independente do caminho

b) Calcule a integral ao longo do segmento de reta de (−1,2) para (1,3)

c) Calcule a integral $\int_{(-1,2)}^{(1,3)} y^2dx + 2xydy$ usando a função potencial para confirmar que o valor é o mesmo obtido na parte b)

33. Mostre que as integrais a seguir são independentes do caminho e calcule o seu valor

a) $\int_{(1,2)}^{(4,0)} 3ydx + 3xdy$

b) $\int_{(0,0)}^{(3,2)} 2xe^ydx + x^2e^ydy$

c) $\int_{(2,-2)}^{(-1,0)} 2xy^3dx + 3y^2x^2dy$

d) $\int_{(0,1,1)}^{(1,0,1)} 2xydx + x^2dy + 2dz$

e) $\int_{(-1,0,0)}^{(2,2,3)} dy + dz$

f) $\int_{(-1,0,0)}^{(1,1,1)} e^ydx + (xe^y + e^z)dy + (ye^z - 2e^{-2z})dz$

34. Confirme que o campo de força F é conservativo em uma região D do plano e calcule o trabalho realizado pelo campo de força numa partícula que se move de P para Q ao longo de uma curva suave de P para Q contida em D.

a) $F(x,y) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$ ; P(1,1) e Q(0,0)

b) $F(x,y) = ye^{xy}\,\mathbf{i} + xe^{xy}\,\mathbf{j}$ P( −1,1) e Q(2,0)

35. Determine o trabalho realizado pela força $\vec{f} = (yze^{xz}, e^{xz}, xye^{xz} + 1)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva $y = \dfrac{2}{x}$, do ponto A( −1, −2, 0) ao B( −2, −1, 0). Esse trabalho é maior, menor ou igual ao realizado pela mesma força para deslocar uma partícula em linha reta de A até B?

36. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{f} = (2x + z + 4)\,\vec{i} + (y^2 - 3z - 1)\,\vec{j} + (x - 3y + z)\,\vec{k}$ , sobre uma partícula, ao longo de C, de A(2,4,2) a B(2,0,0), onde C é

a) o segmento de reta AB; b) a parábola $y = z^2$ no plano x = 2

37. Use o Teorema de Green para calcular as seguintes integrais curvilíneas

a) $\oint_C x^2dx + (4x + y)dy$ ao longo do triângulo de vértices (0,0), (1,2) e (2,0) no sentido anti-horário.

b) $\oint_C (\ln x - 2)dx + (2x + e^y)dy$ ao longo da elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ no sentido horário.

c) $\oint_C (y^2 + \sqrt{(4 - x^2)}dx + (\ln y - 4x)dy$ ao longo do retângulo de vértices (0,0), (3,0),(3,2) e (0,2), no sentido anti-horário.

d) $\oint_C (x^2 - y)dx + xdy$ ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 4$, no sentido anti-horário.

e) $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{f} = (y,0)$ C é o triângulo de vértices A(0,1); B(3,1) e C(2,2) no sentido horário.

## Respostas

1. a) segmento de reta; b) elipse no plano y = 4; c) parábola no plano x = 1; d) reta; e) parábola no plano y = 2

2. a) $2\left(t^2+t\right)\vec{i} + \left(t - t^2 + \text{sen}t\right)\vec{j} + \cos t\,\vec{k}, 0 \le t \le 2\pi$. b) $t^2 + 2t^3 + \left(t - t^2\right)\text{sen}t, 0 \le t \le 2\pi$.

3. a) ( 3, 1, 1 ) 4. a) $\vec{j}$ . b) $(1/2)\vec{i} + 2\vec{k}$

5. a) $-3\cos^2(t)\text{sen}(t)\vec{i} + \sec^2(t)\vec{j} + 2\text{sen}(t)\cos(t)\vec{k}$. b) $\left(\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)\right)\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j}$.

c) $-e^{-t}\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j}$. d) $\left(\frac{9}{(2t+1)^2}\right)\vec{i} - \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)\vec{j}$.

6. a) x = 1 + 2t; y = 2 – t; b) $x = 1 - \sqrt{3}\pi t$; $y = \sqrt{3} + \pi t$; $z = 1 + 3t$

7. $\vec{v}(t) = -2\text{sen}(t)\vec{i} + 5\cos(t)\vec{j}$; $\left|\vec{v}(\pi/4)\right| = \sqrt{29/2}$; $\vec{a}(t) = -2\cos(t)\vec{i} - 5\text{sen}(t)\vec{j}$; $\left|\vec{a}(\pi/4)\right| = \sqrt{29/2}$.

9. $x = ae^t$; $y = be^t$; $z = ce^t$ , a, b e c constantes arbitrárias.

10. a) As partículas colidem no instante t = 3 e estão na posição ( 9,9,9)
b) $\vec{v}_1(3) = (6,7,6)$; $\vec{a}_2(3) = (0,2,0)$

11. a) -2/5; b) zero; c) -6/169; d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ e) $2\sqrt{2}$. f) $\sqrt{2}$; g) $3\sqrt{6}$; 12. $\vec{r}(t) = \left(e^{-2t}, e^{-2t}\right)$

13. a) -36i-12j; b) 4i+4j.

14. a) a curva de nível é a reta y = 2x e o vetor gradiente (4, -2) b) a curva de nível é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ e o gradiente ( –4,0)

15. a) $-28/\sqrt{2}$ ; b) a direção de -12i -16j; c) a direção de 12i +16j; d) a direção de 4i -3j.

16. $2e^{-\pi/2}i$. 17. $\frac{-178}{\sqrt{14}}$; 4i - 8j + 54k , $\sqrt{2996}$ ; 18. a) div F = 2x + y; rot F = z **i**

b) div F = 0; rot F = ( $40x^2z^4 - 12xy^3$) **i** + ($14y^3z + 3y^4$) **j** – ($16xz^5 + 21y^2z^2$) **k**

c) div F = $\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ; rot F = **0;** d) div F = 2xz + 2xy + 2; rot F = **i** + $x^2$ **j** + $y^2$ **k**

19. 0;    20. 0;    21.  $( 1 + y )\,\mathbf{i} + x\ \mathbf{j}$;

23. a) $F(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2y^2}\,i + \dfrac{x}{1+x^2y^2}\,j$ ;  b) $F(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} - 6y\,\mathbf{j} + 8z\,\mathbf{k}$;

c) $F(x,y,z) = 2x\cos(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathbf{i} + 2y\cos(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathbf{j} + 2z\cos(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathbf{k}$

25. a) conservativo; $u(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + C$ ;  b)  e  d)  não conservativo

c) conservativo; $u(x,y) = x\cos y + y\,\mathrm{sen}\,x + C$;  e) conservativo; $u = \mathrm{sen}\,xy + e^{xy} + z + C$

f) conservativo; $u = xyz + \mathrm{sen}\,x + \cos y + C$

26. $14(2\sqrt{2} - 1)$ ;     25. a) 0;  b) $-1/2$

28. a) 34/7;  b) 0; c) c)(1/12) $(3e^4 + 6e^{-2} - 12e + 8e^3 - 5)$;  d) 12; e) 8

29. a) 15/2;   b) 6;    c) 7;   d) 29/4 ;        30. 9/2 nos dois casos;      31.   412/15

33. a) $-6$;  b) $9e^2$;  c) 32;  d) 0;  e) 5;  f) $2e + e^{-2}$

34.  a) $W = -1/2$;  b) $W = 1 - e^{-1}$            35.  1; o trabalho é igual;              36.  a) e b) 2/3;

37.  a) 8;     b) $-12\pi$;    c) $-36$;   d) $8\pi$;   e) 3/2