Cálculo Vetorial / Ilka Rebouças Freire / DMAT – UFBA

3. Integrais de Linha

Até agora consideramos dois tipos de integrais em coordenadas retangulares: as integrais simples (integrais de função de uma variável sobre um intervalo) e as integrais duplas (integrais de função de duas variáveis sobre uma região no plano). Vamos agora considerar integrais ao longo de curvas em espaços bi e tridimensionais.

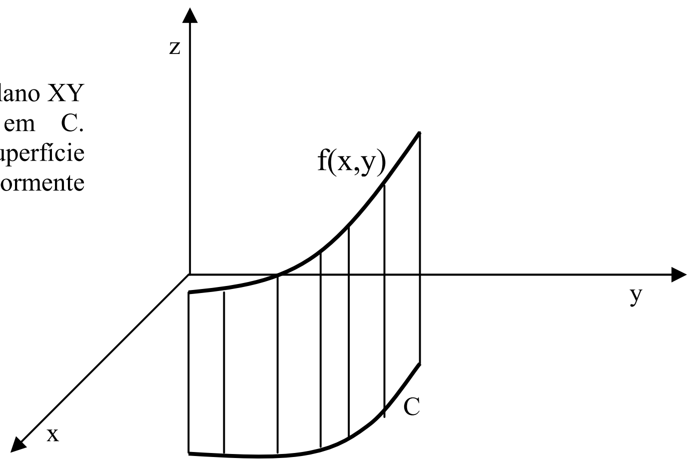
Relembremos que o processo utilizado na definição das integrais, as integrais de Riemann, consistiu em:

- Subdividir a região de integração em sub-regiões: intervalos, no caso da integral simples e retângulos, no caso da dupla;
- Considerar um ponto arbitrário P_k dentro da região;
- Multiplicar o elemento de integração (Δx ou ΔA) pelo valor da função nesse ponto, $f(P_k)$;
- Considerar o somatório dos valores em cada região e calcular o limite quando o número de sub-regiões tende ao infinito.

Vamos utilizar o mesmo procedimento para o caso do cálculo da integral ao longo de uma curva C.

> **Definição**: Dizemos que C é uma ***curva suave*** se admite uma parametrização $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$; $a \leq t \leq b$ tal que $x'(t)$, $y'(t)$ e $z'(t)$ são contínuas e não simultaneamente nulas em $[a,b]$.

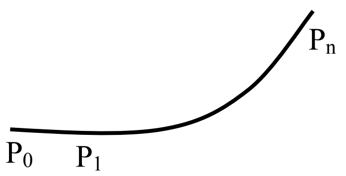
Assim, sejam C uma curva suave entre dois pontos do plano XY e f(x,y) uma função contínua e não-negativa em C. Consideremos o seguinte problema: Calcular a área da superfície cilíndrica limitada inferiormente pela curva C e superiormente pela função f(x,y)

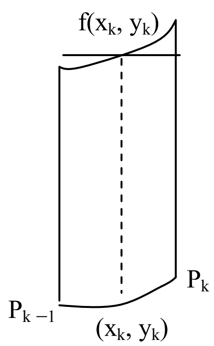


Dividimos C em *n* arcos através de uma seqüência de pontos $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n$, entre os pontos inicial e final de C, na direção de crescimento do parâmetro de C.

Consideremos o arco de curva entre os pontos P_{k-1} e P_k de comprimento Δs_k e a "tira" limitada inferiormente por esse arco de curva e superiormente pela função f(x,y).

Seja (x_k, y_k) um ponto arbitrário neste intervalo e consideremos o retângulo de base Δs_k e altura $f(x_k, y_k)$. Podemos aproximar a área da "tira" pela área desse retângulo.





Se aumentarmos o número de divisões de modo que o comprimento de cada arco tenda a zero, é razoável admitir que o erro na aproximação tenda a zero e a área da superfície seja, caso exista, o limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k = \int\limits_C f(x,y)ds$

A integral $\int\limits_C f(x,y)ds$ é chamada de **integral de linha de f,** em relação a s, ao longo de C.
A mesma definição se estende para o caso de f ser contínua e admitir valores tanto positivos quanto negativos.

3.1 Cálculo de Integrais de Linha

Não são necessários métodos especiais para o cálculo de integrais de linha. Podemos expressar uma integral de linha como uma integral definida comum, como veremos a seguir.

Suponhamos que a curva C seja representada pelas equações paramétricas C: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$ e que os pontos das subdivisões P_{k-1} e P_k correspondam aos valores t_{k-1} e t_k do parâmetro t. Supondo $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, podemos aproximar Δs_k por

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2}\,\Delta t_k$$

e reescrever a integral de linha como segue.

$$\int\limits_C f(x,y)ds = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2}\,\Delta t_k$$

Logo,

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Observação: No caso em que a função é de três variáveis f(x,y,z) e C uma curva no espaço dada por equações paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$ a expressão fica:

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Exemplo 01: Calcule as seguintes integrais de linha

(a) $\int\limits_C (2 + x^2 y)ds$ onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: As equações paramétricas do semi-círculo são $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Temos que x´(t) = −sen(t) e y´(t) = cos(t). Portanto $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-\text{sen}t)^2+(\cos t)^2}=1$.

Substituindo em $\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$, obtemos:

$$\int_C f(x,y)ds=\int(2+\cos^2 t\,\text{sen}t)dt=\left[2t-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi}=2\pi+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=2\pi+\frac{2}{3}.$$

(b) $\int_C (xy+z^3)ds$ de (1,0,0) a (−1, 0, π) ao longo da hélice dada pelas equações paramétricas $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\text{sen}t \quad 0\le t\le\pi\\ z=t\end{cases}$.

Solução:

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}\left(\cos t\,\text{sen}t+t^3\right)\sqrt{(-\text{sen}t)^2+(\cos t)^2+1}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2}(\cos t\,\text{sen}t+t^3)dt=\sqrt{2}\left[\frac{\text{sen}^2 t}{2}+\frac{t^4}{4}\right]_0^{\pi}=\sqrt{2}\,\frac{\pi^4}{4}.$$

Observação: Se C é a união de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$, então a integral de f ao longo de C é a soma das integrais ao longo de cada trecho

$$\int_C f(x,y)ds=\int_{C_1} f(x,y)ds+\int_{C_1} f(x,y)ds+\ldots+\int_{C_n} f(x,y)ds$$

(c) $\int_C 2x\,ds$, sendo C formada pelo arco de parábola C_1: $y = x^2$ de (0,0) a (1,1) e por C_2 o segmento de reta vertical de (1,1) a (1,2).

Solução: As equações paramétricas de C_1 e C_2 são respectivamente: $C_1:\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases};0\le t\le 1$ e $C_2:\begin{cases}x=1\\ y=t\end{cases};1\le t\le 2$.

A integral sobre C_1 fica: $\int_{C_1} f(x,y)ds=\int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt=\frac{1}{4}\frac{2}{3}\left[(1+4t^2)^{3/2}\right]_0^1=\frac{1}{6}(5^{3/2}-1)$;

A integral sobre C_2 fica: $\int_{C_2} f(x,y)ds=\int_1^2 2\sqrt{0+1}\,dt=[2t]_1^2=4-2=2$. Logo, $\int_C f(x,y)ds=\frac{5^{3/2}-1}{6}+2$.

Algumas observações sobre as integrais de linha

1. O valor da integral de linha ao longo de uma curva C não depende da parametrização de C;
2. Se C é uma curva paramétrica que começa em A e termina em B quando percorrida no sentido do parâmetro crescente e for reparametrizada de maneira que percorra o sentido crescente de B para A (ou seja, orientação invertida) indicamos a curva por − C, temos que $\int_C f(x,y)ds=-\int_{-C} f(x,y)ds$.

3.2 Integrais de Linha em relação a x, y e z

Até agora só consideramos integrais de linha de funções escalares de duas ou três variáveis: f(x,y) ou f(x,y,z). Existem outros tipos de integrais de linha que serão importantes para o cálculo de integrais de linha de campos vetoriais, como, por exemplo, na definição do trabalho como uma integral de linha.

Consideremos o caso de duas variáveis: Seja f(x,y) e C: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $a \leq t \leq b$ e vamos integrar f ao longo de C, em relação à variável x.

Substituindo ds por dx e expressando o integrando na variável t obtemos:

$$\boxed{\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt \quad (1)}$$

Analogamente, substituindo ds por dy e expressando o integrando na variável t obtemos:

$$\boxed{\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)dt \quad (2)}$$

- Chamamos as integrais (1) e (2) de integrais de linha em relação a x e y respectivamente.
- No caso da integral $\int_C f(x,y)ds$ que é em relação a s, dizemos que a integral é em **relação ao comprimento de arco**.
- As expressões se estendem naturalmente para o caso de três variáveis.

Observações:

- As integrais em relação a x e a y, em geral, ocorrem em conjunto, caso em que, por comodidade, desprezamos um sinal de integração e escrevemos simplesmente

$$\int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy = \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

- É fácil mostrar que $\int_C f(x,y)dx = 0$, ao longo de qualquer segmento de reta paralelo a OY e $\int_C f(x,y)dy = 0$ ao longo de qualquer segmento de reta paralelo a OX, VERIFIQUE!

Exemplo 02: Calcule $\int_C (x+2y)dx + (x-y)dy$, sendo C: x = 2cost e y = 4sent; $0 \leq t \leq \pi/4$.

Solução: i) $\int_C (x+2y)dx = \int_0^{\pi/4}(2\cos t + 8\text{sen}t)(-2\text{sen}t)dt = -4\int_0^{\pi/4}\text{sen}t\cos t dt - 16\int_0^{\pi/4}\text{sen}^2 t dt$

$$= -4\int_0^{\pi/4}\text{sen}t\cos t dt - 16\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 4\left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{\pi/4} - 8\left[t - \frac{\text{sen}2t}{2}\right]_0^{\pi/4} = 2(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1) - 8\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 3 - 2\pi$$

ii) $\int_C (x-y)dy = \int_0^{\pi/4}(2\cos t - 4\text{sen}t)(4\cos t)dt = 8\int_0^{\pi/4}\cos^2 t dt - 16\int_0^{\pi/4}\text{sen}t\cos t dt$

$$= 8\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2t}{2}dt - 16\int_0^{\pi/4}\text{sen}t\cos t dt = 4\left[t + \frac{\text{sen}2t}{2}\right]_0^{\pi/4} - 8\left[\text{sen}^2 t\right]_0^{\pi/4} = \pi - 2.$$

Somando os resultados de i) e ii) obtemos 1 − π.

3.3 O Trabalho como uma Integral de Linha

Relembremos da Física que

- Se uma força constante de magnitude F for aplicada na direção do movimento do objeto e se esse objeto move-se de uma distância d, então definimos o trabalho W realizado pela força sobre o objeto como sendo $W = F \cdot d$;
- Suponhamos agora que um objeto se move na direção positiva ao longo do eixo OX no intervalo [a,b], sujeito a uma força variável F(x) que é aplicada na direção do movimento. Então definimos o trabalho realizado pela força sobre o objeto como sendo $W = \int_a^b F(x)dx$;
- Consideremos agora o vetor força **F** de magnitude igual a $|\mathbf{F}| = F$ agindo na direção do movimento de um objeto que se move em linha reta de P a Q tal que $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$. O trabalho pode ser escrito na forma vetorial por

$$W = |\mathbf{F}| \left|\overrightarrow{PQ}\right| = F \cdot d;$$

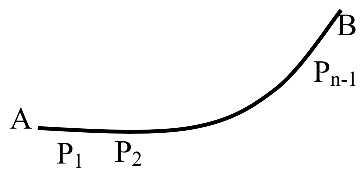
- No caso em que a força é constante e faz um ângulo θ com o vetor deslocamento, o trabalho realizado por F é definido como $W = |\mathbf{F}| \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cos\theta = F \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Nosso objetivo agora é estender o conceito de trabalho para o caso mais geral em que uma força variável atua sobre uma partícula que se desloca ao longo de uma curva no espaço bi ou tridimensional, situação que surge em muitas aplicações de campos de força.

Suponhamos que uma partícula se move ao longo de uma curva paramétrica suave C, através de um campo de força contínuo F(x,y) (ou F(x,y,z)). O trabalho realizado por F será chamado de ***trabalho realizado pelo campo de força***.

O procedimento para a definição do trabalho é análogo ao que fizemos para a definição de integral de linha:

Suponhamos que a partícula se move ao longo de C do ponto A para o ponto B no sentido de crescimento do parâmetro. Dividimos C em n arcos através de uma seqüência de pontos $P_1, P_2, ...P_{n-1}$, entre A e B



Vamos considerar o k-ésimo arco suficientemente pequeno de maneira que a força F_k tenha valor constante. Logo, o trabalho realizado pela força F_k quando seu ponto de aplicação (x_k,y_k) se move ao longo de $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ (que corresponde ao vetor $\Delta x_k\, i + \Delta y_k\, j$) é dado por
$\Delta W_k = F_k(x_k,y_k) \cdot (\Delta x_k\, i + \Delta y_k\, j)$

Fazendo o comprimento de cada arco tender a zero, tomando o somatório de W_k e passando ao limite obtemos a seguinte definição que enunciaremos para o caso tridimensional:

Se F(x,y,z) = f(x,y,z) i + g(x,y,z) j + h(x,y,z) k é um campo de força com f, g e h contínuas e C é uma curva suave parametrizada C: x = x(t), y = y(t) , z = z(t), o trabalho realizado ao longo da curva C é dado por

$$\int_C f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$$

Ou, na forma vetorial, $W = \int_C \mathbf{F} \cdot dr$, sendo r(t) = x**i** + y**j** + z**k** e dr = dx **i** + dy **j** + dz **k.**

Exemplo 03:

(a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força F(x,y) = x^2 **i**+xy **j** ao longo da curva C: r(t)=2 cost **i**+2 sent **j** (0 ≤ t ≤ π).

Solução:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot dr = \int_C (x^2 i + xyj) \cdot (dxi + dyj) = \int_C x^2 dx + xydy =$$

$$= \int_0^{\pi} (2\cos t)^2 (-2\,\mathrm{sen}\, t)dt + \int_0^{\pi} (4\cos t\,\mathrm{sen}\, t)(2\cos t)dt = -8\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{sen}\, tdt + 8\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{sen}\, tdt = 0$$

(b) Calcule o trabalho realizado pelo campo de força F(x,y) = xy**i** + x^2 **j** na partícula que se move ao longo da curva C: x = y^2 de (0,0) para (1,1)

Solução: Considerando y o parâmetro da curva temos que $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} ; 0 \le t \le 1$

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot dr = \int_C xydx + x^2 dy = \int_0^1 t^3 2tdt + \int_0^1 t^4 dt = \left[\frac{2t^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Observação: As unidades de W dependem das unidades escolhidas para força e distância.

Referências Bibliográficas:

1. O Cálculo com Geometria Analítica – Swokowski vol 2
2. Cálculo – Um novo horizonte – Anton vol2
3. Cálculo C – Diva Fleming