Cálculo Vetorial / Ilka Rebouças Freire / DMAT – UFBA

4. Independência de Caminhos. O Teorema de Green.

4.1 Independência de Caminhos

Consideremos a integrais $\int_C xdx + ydy$ e $\int_C xydx + ydy$ nos seguintes casos:

(i) C é o segmento de reta entre (0,0) e (1,1);
(ii) C é o segmento da parábola $y = x^2$ entre (0,0) e (1,1).

Para a primeira integral, no primeiro caminho, temos C: $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}; 0 \le t \le 1$. Logo,

$$\int_C xdx + ydy = \int_0^1 tdt + \int_0^1 tdt = \left[t^2\right]_0^1 = 1.$$

No segundo caminho, C: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}; 0 \le t \le 1$. Donde

$$\int_C xdx + ydy = \int_0^1 tdt + \int_0^1 t^2 2tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Agora, em respeito a segunda integral, no primeiro caminho, temos:

$$\int_C xydx + ydy = \int_0^1 \frac{t^2}{2}dt + \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

E, no segundo caminho:

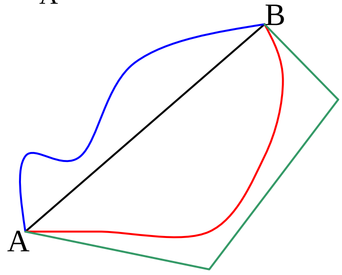
$$\int_C xydx + ydy = \int_0^1 t^3 dt + \int_0^1 t^2 2tdt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{t^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Vemos que, na primeira integral, pelos dois caminhos tomados para ir do ponto A(0,0) para o ponto B(1,1) o resultado da integral foi o mesmo. Isto não aconteceu na segunda.

Uma integral, como da primeira, acima, é chamada de **integral independente do caminho**. O nosso objetivo agora é investigar sob que condições uma integral independe do caminho.

Vamos estabelecer que

- Um caminho de A a B é uma curva parcialmente suave de A a B;
- Uma integral de linha é independente do caminho numa região se obtemos o mesmo valor para qualquer caminho de A a B na região;
- Se a integral $\int_C F(x,y)ds$ é independente do caminho, vamos denotá-la por $\int_A^B F(x,y)ds$ pois o valor da integral depende apenas dos extremos A e B da curva;
- As regiões D do plano ou do espaço são tais que dois pontos quaisquer podem ser ligados por uma curva parcialmente suave inteiramente contida na região (tais regiões são chamadas de regiões conexas).



O resultado que enunciaremos a seguir nos dá uma condição para que uma integral de um campo vetorial seja independente do caminho.

> Se F(x,y) = f(x,y)**i** + g(x,y) **j** é contínua em uma região D, então a integral curvilínea $\int_C F\cdot dr = \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$ é independente do caminho se e somente F é um campo conservativo, ou seja, existe uma função escalar u(x,y) (função potencial) tal que F(x,y) = ∇u

No nosso exemplo inicial, para o caso em que F(x,y) = x **i** + y **j,** é um campo conservativo pois existe a função $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ tal que ∇u = F(x,y).

O resultado a seguir é análogo ao Teorema Fundamental do Cálculo e nos dá um método para calcular integrais curvilíneas que não dependam do caminho

> Seja F(x,y) = f(x,y)**i** + g(x,y) **j** contínua em uma região D e C uma curva parcialmente suave em D com extremidades A(x_1,y_1) e B(x_2, y_2). Se F(x,y) = ∇u, então
>
> $$\int_C F\cdot dr = \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F\cdot dr = \left[u(x,y)\right]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

Exemplos:

1. No nosso exemplo inicial $\int_C xdx + ydy$, A(0,0) e B(1,1), e $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, temos:

$$\int_C xdx + ydy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xdx + ydy = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

2. O campos F(x,y) = (2xy + 1)**i** + (x^2 + 4y)**j** é conservativo e que uma função potencial correspondente é u(x,y) = $x^2y + x + 2y^2$. Assim, a integral $\int_A^B F\cdot dr$, sendo A(0,0) e B(1,1) é dada por:

$$\int_A^B F\cdot dr = \left[x^2y + x + 2y^2\right]_{(0,0)}^{(1,1)} = 1+1+2 = 4.$$

3. O campo F(x,y,z) = senx i – 2yz j – y^2 k é conservativo e que a função potencial correspondente é u(x,y,z) = –cosx –y^2z. Logo, a integral $\int_C F\cdot dr$ ao longo de qualquer caminho C de A(0,2,0) até B(2,2,4) é:

$$\int_C F\cdot dr = \left[-\cos x - zy^2\right]_{(0,2,0)}^{(2,2,4)} = -\cos 2 - 16 + 1 = -\cos 2 - 15.$$

> Se F é um campo conservativo e C é uma curva fechada temos que $\int_C F\cdot dr = 0$.
>
> A integral de linha em torno de uma curva fechada será indicada por $\oint F\cdot dr$.

4.2 O Teorema de Green

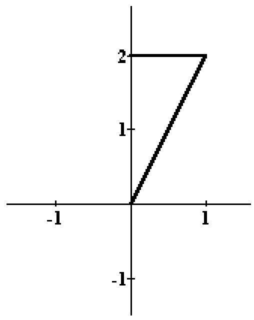
O resultado que enunciaremos a seguir expressa a integral dupla de uma região do plano em termos de sua integral de linha em torno de sua fronteira. Este resultado é o Teorema de Green, que foi demonstrado pelo matemático britânico George Green em 1828 e é um caso particular do teorema de Stokes.

> Seja C uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário e ***R*** a região fechada delimitada por C. Se F(x,y) = f(x,y) **i** + g(x,y) **j** é um campo vetorial contínuo com derivadas de 1ª ordem contínuas em um domínio D que contém ***R***, então
>
> $$\oint_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Observemos que, como já foi enfatizado anteriormente, se o campo F(x,y) for conservativo, então

$$\oint_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

Exemplo: Use o Teorema de Green para calcular $\oint_C y^2dx + 2x^2dy$, sendo C o triângulo de vértices (00), (1,2) e (0,2) orientado no sentido anti-horário.



Solução: A região R é dada por $0 \le x \le 1$ e $2x \le y \le 2$.

$f(x,y) = y^2$ e $g(x,y) = 2x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x - 2y$

Usando o Teorema de Green, temos:

$$\oint_C y^2dx + 2x^2dy = \iint_R (4x-2y)dxdy = \int_0^1\int_{2x}^2 (4x-2y)dydx$$

$$= \int_0^1 \left[4xy - y^2\right]_{2x}^2 dx = \int_0^1 (8x - 4 - 8x^2 + 4x^2)dx = \int_0^1 (-4x^2 + 8x - 4)dx$$

$$= \left[-\frac{4x^3}{3} + 4x^2 - 4x\right]_0^1 = -\frac{4}{3}\,.$$

Observação: Se a curva C estiver orientada no sentido horário, aplicamos o Teorema de Green para calcular a integral sobre a curva – C e usamos a propriedade $\int_{-C} F \cdot dr = -\int_C F \cdot dr$

4.3 Cálculo de área com o Teorema de Green

O teorema de Green facilita o cálculo de áreas de regiões limitadas por uma curva seccionalmente suave, simples e fechada. Isso pode acontecer utilizando o seguinte resultado que é consequência do teorema de Green.

Se R for uma região tendo por fronteira uma curva C fechada simples e seccionalmente suave e A unidades de área for a área de R, então

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx \,.$$

Para provar este resultado, basta usar o teorema de Green supondo que f(x,y)=-y/2 e g(x,y)=x/2. Veja:

$$\oint_C -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}y\right)\right]dA = \iint_R \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dA = \iint_R dA = A$$

Exemplo: Sejam x = acos(t) e y = bsen(t) as equações paramétricas de uma elipse C. Como dx = -asen(t) dt e dy = bcos(t) dt, então a área A da região limitada por ela, é:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(a\cos t)(b\cos t dt) - (b\,\mathrm{sen}\,t(-a\,\mathrm{sen}\,t dt))\right] = \int_0^{2\pi} ab\left(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t\right)dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

Referências Bibliográficas:

1. O Cálculo com Geometria Analítica – Swokowski vol 2
2. Cálculo – Um novo horizonte – Anton vol2
3. Cálculo C – Diva Fleming