Cálculo Vetorial / Ilka Rebouças Freire / DMAT – UFBA

1. Funções Vetoriais

Até agora nos cursos de Cálculo só tratamos de funções cujas imagens estavam em R. Essas funções são chamadas de funções com valores reais ou funções escalares. Vamos tratar a seguir das funções cujos valores são vetores do R^2 ou R^3. Um exemplo de uma função vetorial é a velocidade, num instante t, de um objeto que se move no espaço.

> Seja $D \subset R$. Uma função vetorial **r**(t) com domínio D é uma correspondência que associa a cada número t em D exatamente um vetor **r**(t) em R^3

Uma vez que as três componentes de r(t) são determinadas univocamente para cada t em D podemos escrever r(t) = f(t) **i** + g(t) **j** + h(t) **k**. onde f, g e h são funções escalares de domínio D e são chamadas de ***funções componentes*** de **r**(t)**.**

> Se $D \subset R$, então **r(t)** é uma função com valores vetoriais com domínio D se e somente se existem funções escalares f, g e h tais que **r**(t) = f(t) **i** + g(t) **j** + h(t) **k** para todo t em D

Observações:

- As mesmas definições valem para **r**(t) em R^2, isto é, r(t) = f(t) **i** + g(t) **j**;
- O domínio da função **r**(t) corresponde à intersecção dos domínios das funções escalares componentes f, g e h, isto é, Dom(**r**) = Dom(f) ∩ Dom(g) ∩ Dom(h).

Exemplos:

1) O movimento de uma partícula P sobre uma circunferência de raio 1 pode ser expresso pela função vetorial $\vec{r}(t) = \cos t\, \vec{i} + \operatorname{sen} t\, \vec{j}$, onde a variável t representa o tempo e P(cost, sent) dá a posição da partícula em movimento. Neste caso o domínio da função vetorial é R e as funções escalares componentes são f(t) = cos(t) e g(t) = sen(t). Alguns valores para r(t), na tabela abaixo:

t	**r(t)**
0	i
π/2	**j**
π	–**i**

Os valores significam que nos instantes t = 0; t = π/2 e t = π a particular se encontra nas posições $P_1(1,0)$; $P_2(0,1)$ e $P_3(-1, 0)$.

2) **r**(t) = cost **i** – 3t **j.** Neste caso o domínio da função vetorial é R e as imagens são vetores do R^2.
As funções componentes são f(t) = cost e g(t) = –3t. Alguns valores para r(t), na tabela abaixo:

t	**r(t)**
π	–**i** –3 π **j**
0	**i**
π/2	–3π/2 **j**

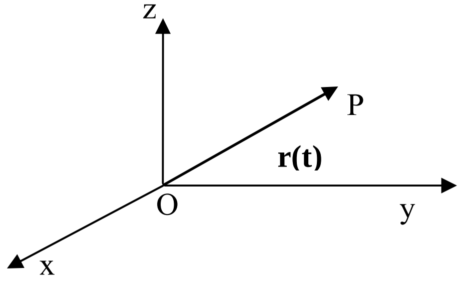
Os valores significam que nos instantes t = π; t = 0 e t = π/2 a particular se encontra nas posições $P_1(-1,-3\pi)$; $P_2(1,0)$ e $P_3(0,-3\pi/2)$.

3) **r**(t) = ln(t − 1) **i** + e^t **j** + $\sqrt{t}$ **k.** O domínio da função é (1, +∞) e as imagens são vetores do R^3; As funções componentes são f(t) = ln(t − 1); g(t) = e^t e h(t) = $\sqrt{t}$. Alguns valores para r(t):

t	**r(t)**
2	e^2 **j** + $\sqrt{2}$ **k**
3	ln2 **i** + e^3 **j** + $\sqrt{3}$ **k**

1.1 Gráficos de Funções Vetoriais

Dada uma função vetorial **r**(t) = f(t) **i** + g(t) **j** + h(t) **k.** Para cada valor de t obtemos um vetor **r**(t). Não faremos distinção entre o vetor **r**(t) e seu vetor posição OP, sendo P o ponto terminal de OP.



- Dada a função **r**(t) = f(t) **i** + g(t) **j** + h(t) **k,** os pontos terminais dos vetores **r**(t) definem uma curva C no espaço (ou no plano se **r**(t) = f(t) **i** + g(t) **j**).
- O ***gráfico*** de C consiste em todos os pontos (f(t), g(t), h(t)) em um sistema coordenado *xyz*.
- As equações x = f(t); y = g(t) e z = h(t) são chamadas de ***equações paramétricas*** de C.
- O gráfico da função vetorial é, portanto, o gráfico das equações paramétricas.
- É usual escrever as equações paramétricas como x = x(t); y = y(t) e z = z(t).
- A orientação da curva C é determinada pelos valores crescentes de t

Exemplo: Descreva o gráfico das seguintes funções vetoriais

1) **r**(t) = (1 − t) **i** + 3t **j** + 2t **k**

O gráfico da função é uma curva no espaço cujas equações paramétricas são: $\begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = 3t \\ z(t) = 2t \end{cases}$

A reta passa pelo ponto (1,0,0) e tem vetor diretor v_r = (−1, 3, 2).

Da Geometria Analítica que as equações paramétricas da reta **r** que passa por $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e tem a direção do vetor v = (a, b, c) são dadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

O mesmo vale se a reta está no plano *xy*, $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

2) **r(t)** = cost **i** + sent **j**

O gráfico da função é uma curva no plano cujas equações paramétricas são $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$

Estas equações são as equações paramétricas da circunferência de centro na origem e raio 1. Observemos que elevando ao quadrado e somando as equações x(t) e y(t) obtemos $x^2 + y^2 = 1$, que é a relação fundamental da trigonometria. A orientação da curva é no sentido anti-horário que corresponde à variação crescente de t.

Como foi visto, esta função vetorial pode representar o movimento de uma partícula P sobre uma circunferência de raio 1 e P(cost, sent) dá a posição da partícula em movimento.

- De uma maneira geral a função vetorial **r**(t) = a cos(t) **i** + a sen(t) **j** tem como gráfico a circunferência de centro na origem e raio **a**.
- A função vetorial **r**(t) = a cos(t) **i** + b sen(t) **j** (a ≠ b) tem como gráfico a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

3) Seja **r**(t) = 3t **i** + (1 – 9t^2) **j**; t ∈R. Esboce a curva C determinada por r(t) e indique a orientação para r(0) e r(1/3)

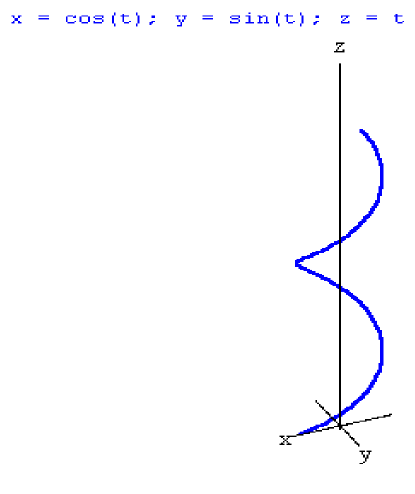
As equações paramétricas são $\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 1 - 9t^2 \end{cases}$. Eliminando o parâmetro t,: t = x/3, substituindo na 2ª equação, temos y = 1 –9(x^2/9) = 1 –x^2. Assim, a curva é uma parábola. Alguns exemplos de imagens:

$$r(0) = j \Rightarrow r(0) = (0,1)$$

$$r(2/3) = 2i - 3j \ \Rightarrow r(2/3) = (2, -3)$$

4) Seja **r**(t) = acost **i** + asent **j** + bt **k** ; para t ≥ 0. As equações paramétricas de C são $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a \operatorname{sen} t \\ z(t) = bt \end{cases}$

Eliminando o parâmetro nas duas primeiras equações obtemos $x^2 + y^2 = a^2$ que é a equação de um cilindro circular. Quando t varia no intervalo [0, 2π], um ponto P(x,y,z) parte de (a,0,0) e se move para cima, fazendo uma revolução em torno do cilindro. A curva resultante é chamada de **hélice circular**.



1.2 Cálculo de Funções Vetoriais: Limites, Derivadas e Integrais

Seja **r(t)** = f(t) **i** + g(t) **j** + h(t) **k,** temos as seguintes definições:

$$\lim_{t\to a} r(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right] i + \left[\underset{t\to a}{g(t)}\right] j + \left[\underset{t\to a}{h(t)}\right] k$$

desde que f(t), g(t) e h(t) tenham limites quando t tende a **a**

r(t) é contínua em **a** se $\lim\limits_{t\to a} r(t) = r(a)$

Exemplo: Calcule os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{t\to\pi/4} (\cos t, \operatorname{sen} t) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. $\lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{t}\,\vec{i} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{j} = \lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{t}\,\vec{i} + \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{j} = \vec{j}$

Se **r(t)** é um função vetorial, então a derivada de r(t) pode ser expressa como $r'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(t+h) - r(t)}{h}$

Se f(t), g(t) e h(t) são diferenciáveis então r(t) é diferenciável e

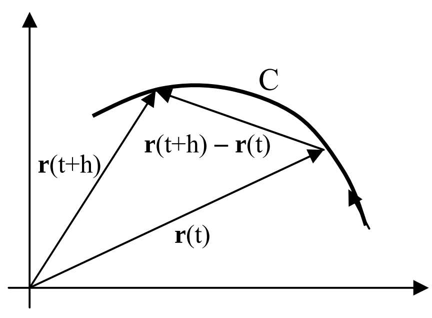
$$r'(t) = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}.$$

Exemplo: Calcule r´(t) nos seguintes casos:

1. r(t) = sent **i** + 2t **j** $\Rightarrow$ r´(t) = cost **i**+ 2 **j**
2. r(t) = t^2 **i** + e^t **j** + $\sqrt{t}$ **k** $\Rightarrow$ $r'(t) = 2t\, i + e^t j + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} k$**.**

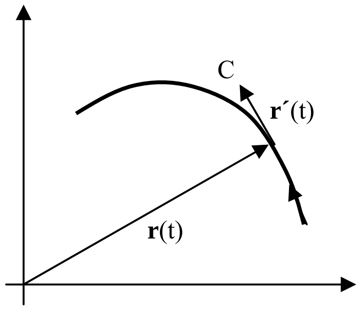
1.2.1 Interpretação Geométrica da Derivada

Consideremos o gráfico C de **r**(t) (com orientação) e os vetores **r**(t), **r**(t + h) e **r**(t + h) – **r**(t), com h > 0. O vetor **r**(t+h) – **r**(t) percorre a reta secante que une os pontos terminais de r(t+h) e r(t).



A representação gráfica acima é para o caso em que $h > 0$. Observemos que o vetor $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ aponta na direção do parâmetro t crescente. No caso de $h < 0$ o vetor apontaria na direção oposta.

Quando $h \to 0$, a reta secante aproxima-se da reta tangente no ponto terminal de $\mathbf{r}(t)$. Concluímos então, que o limite $r'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(t+h) - r(t)}{h}$, se existir e não for nulo, é um vetor que é tangente à curva C na ponta de r(t) e aponta na direção do parâmetro crescente.



> Seja P um ponto sobre o gráfico de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ e seja $\mathbf{r}(t_o)$ o raio vetor que parte da origem até P. Se $\mathbf{r}'(t_o)$ existir e não for nula, então chamamos de $\mathbf{r}'(t_o)$ o vetor tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em $\mathbf{r}(t_o)$ e chamamos a reta que passa por P e que é paralela ao vetor tangente de ***reta tangente*** ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em $\mathbf{r}(t_o)$.
>
> A ***equação da reta tangente*** tem a forma vetorial $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_o) + t\,\mathbf{r}'(t_o)$

Observação: Representaremos $\mathbf{r}'(t)$ sempre por um vetor com ponto inicial P sobre a curva C, que é o gráfico da função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

Exemplos:

1) Determine as equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no ponto t_o nos seguintes casos:

(a) $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + (2 - \ln t)\,\mathbf{j}$; $t_o = 1$

Solução: $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} - (1/t)\,\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}'(t_o) = \mathbf{r}'(1) = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Por outro lado $\mathbf{r}(t_o) = \mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} = (1,2)$. A equação vetorial da reta tangente é portanto $r(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t(2\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$. Escrevendo na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 2 - t \end{cases}$$

(b) $\mathbf{r}(t) = 2\cos(\pi t)\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}(\pi t)\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$; $t_o = 1/3$

Solução: $\mathbf{r}(t_o) = \mathbf{r}(1/3) = i + \sqrt{3}j + k$; $\mathbf{r}'(t) = -2\pi\,\mathrm{sen}(\pi t)\,\mathbf{i} + 2\pi\cos(\pi t)\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}'(t_o) = \mathbf{r}'(1/3) = -\pi\sqrt{3}i + \pi j + 3k$.

A equação vetorial da reta fica $\mathbf{r}(t) = i + \sqrt{3}j + k = t(-\pi\sqrt{3}i + \pi j + 3k)$ e suas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - \pi\sqrt{3}t \\ y = \sqrt{3} + \pi t \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

2) Considere $r(t) = t^3 i + t^{-3} j$; $t > 0$.

a) Esboce no plano a curva determinada por **r**(t) e indique a orientação;

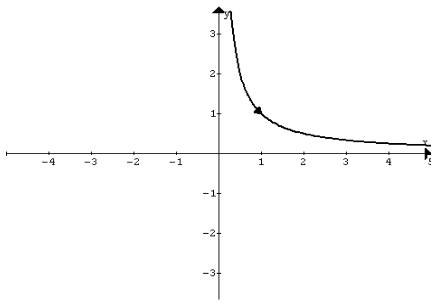
b) Encontre $\mathbf{r}'(t)$ e trace **r**(1) e $\mathbf{r}'(1)$.

Solução:

a) As equações paramétricas da curva C que é gráfico de **r**(t) são $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{-3} \end{cases}$, $t > 0$.

Eliminando o parâmetro obtemos $y = \dfrac{1}{x}$ que é o ramo da hipérbole no 1º quadrante, uma vez que $t > 0$.

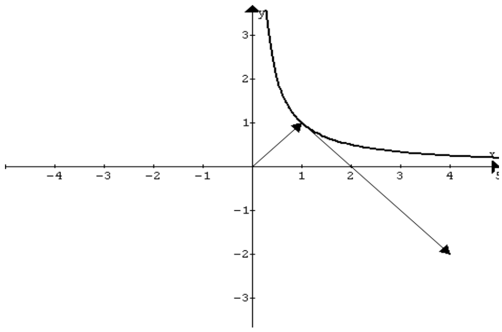
A orientação é da esquerda para a direita.



b) $r'(t) = 3t^2\, i - 3t^{-4}\, j$

$r(1) = i + j \Rightarrow r(1) = (1, 1)$

$r'(1) = 3i - 3j \Rightarrow r'(1) = (3, -3)$



1.2.2 Interpretação Física da Derivada

Consideremos uma partícula em movimento no espaço. Suponhamos que no tempo t, **r**(t) seja o vetor posição da partícula, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas. Ao variar t a extremidade livre do vetor **r**(t) descreve a trajetória C da partícula.

Suponhamos que a partícula esteja em P no tempo t e em Q no tempo $t + \Delta t$. Então, $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ representa o deslocamento da partícula de P para Q, ocorrido no intervalo de tempo Δt.

A *taxa média de variação* de r(t) no intervalo de tempo Δt é dada por $\dfrac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$ e é chamada de ***velocidade média*** da partícula no intervalo Δt.

A ***velocidade instantânea*** da partícula no tempo t, denotada por **v**(t) é dada por

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = r'(t),$$

quando este limite existe.

Analogamente, se **v**(t) é derivável, a ***aceleração*** da partícula é dada por $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$

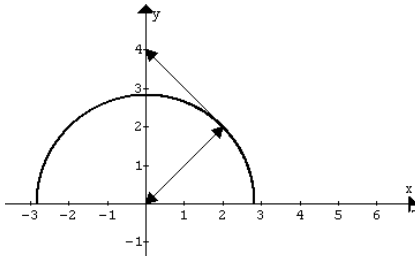
Observações:

- $|r'(t)|$ é o módulo da velocidade no ponto e corresponde à taxa de variação do comprimento de arco em relação ao tempo e é chamada simplesmente velocidade;
- $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$ é chamada de velocidade vetorial;
- Representamos $\mathbf{r}''(t)$ graficamente por um vetor com ponto inicial em P. Na maioria dos casos $\mathbf{r}''(t)$ aponta para o lado côncavo de C.

Exemplo: O vetor posição de um ponto P que se move em um plano xy é dado $\mathbf{r}(t) = 2\sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$; $0 \le t \le \pi$.

a) Encontre os vetores velocidade e aceleração de P num instante t e o módulo da velocidade;
b) Esboce a trajetória C de P, juntamente com $\mathbf{r}(\pi/4)$, $\mathbf{v}(\pi/4)$ e $\mathbf{a}(\pi/4)$.
Solução:
a) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i} - 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$

$|v(t)| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 \text{sen}^2 t + (2\sqrt{2})^2 \cos^2 t} = 2\sqrt{2}$



b) $\mathbf{r}(\pi/4) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v}(\pi/4) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{a}(\pi/4) = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

A trajetória C é um semi-círculo de raio $2\sqrt{2}$.

1.2.3 Regras de Derivação

As regras de derivação de funções vetoriais são similares às de funções escalares
Vale o seguinte resultado:

> Se **u(t)** e **v(t)** são funções vetoriais diferenciáveis e f(t) uma função escalar, então:
> i) $D_t(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
> ii) $D_t(f(t)\mathbf{u}(t)) = f(t)\mathbf{u}'(t) + f'(t)\mathbf{u}(t)$
> iii) $D_t(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t)$ **(· Produto escalar)**
> iv) $D_t(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t)$ **(× produto vetorial)**

Observação: No caso ii) se f(t) é uma constante, então $D_t(f(t)\,\mathbf{u}(t)) = f(t)\,\mathbf{u}'(t)$

> Seja $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$, com f, g e h integráveis em [a,b]. A **integral definida** de **r** de **a** a **b** é $\int_a^b r(t)dt = \int_a^b f(t)dt\, i + \int_a^b g(t)dt\, j + \int_a^b h(t)dt\, k$

> Se $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$, então $\mathbf{R}(t)$ é uma **antiderivada** de $\mathbf{r}(t)$. A integral indefinida de r é
> $$\int r(t)dt = R(t) + C$$

Exemplo: $\int_0^1 (2i + 2tj - 3t^2k)dt = [2ti + t^2j - t^3k]_0^1 = 2i + j - k$

Referências Bibliográficas:
1. O Cálculo com Geometria Analítica – Swokowski vol 2
2. Cálculo – Um novo horizonte – Anton vol2
3. Cálculo C – Diva Fleming