Cálculo Vetorial / Ilka Rebouças Freire / DMAT – UFBA

2. Campos Escalares e Vetoriais. Gradiente. Rotacional. Divergência. Campos Conservativos.

2.1 Campos Escalares e Vetoriais

Dada uma região D do espaço podemos asociar a cada ponto de D uma grandeza escalar ou vetorial.

Definição: Seja D uma região do espaço tridimensional (ou bidimensional)

1. Seja f uma função escalar definida em D. A cada ponto P(x,y,z) $\in$ D, f associa uma grandeza escalar f(P) = f(x,y,z). A região D juntamente com os valores de f em cada um de seus os pontos é chamada de um **campo escalar.**

2. Se a cada ponto P(x,y,z) de uma região D do espaço está associado um vetor que tem P como ponto inicial, então a região D juntamente com a coleção de todos esses vetores constitui um **campo vetorial**.

Assim, sendo D um conjunto do plano (uma região no plano). Um ***campo vetorial*** em R^2 é uma função F que associa a cada ponto P(x,y) de D um vetor bidimensional F(x,y). Podemos escrever F(x,y) em termos de suas funções componentes f e g, da seguintes forma:

F(x,y) = f(x,y) **i** + g(x,y) **j** = (f(x,y), g(x,y)) ou F = f **i** + g **j**.

Exemplos

1. Seja D um sólido esférico no espaço.

i) Se a temperatura em qualquer ponto P(x,y,z) de D é proporcional à distância de P à origem, então a função escalar $T(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ define um **campo escalar** em D, chamado **campo de temperatura** em D.

ii) Se a cada ponto P(x,y,z) de D associamos a função densidade $\rho(x,y,z)$ definimos um **campo escalar** em D.

2. Seja D a atmosfera terrestre. Se a cada ponto P(x,y,z) de D associamos o vetor $\vec{v}(P)$ que dá a velocidade do vento em P definimos um **campo vetorial** em D chamado de **campo de velocidade.**

3. Consideremos uma corrente de água em que a água flui horizontalmente em qualquer nível e consideremos uma camada de água numa profundidade específica. Em cada ponto da camada a água tem uma certa velocidade que pode ser representada por um vetor naquele ponto. Esta associação de vetores com pontos numa camada define um **campo vetorial** chamado **campo de velocidade.**

4. De acordo com a *Lei da Gravitação Universal de Newton*, a Terra exerce uma força atrativa sobre uma massa m em direção ao centro da Terra de grandeza inversamente proporcional ao quadrado da distância da massa ao centro da Terra. Em cada ponto onde se situa, a massa m tem um vetor força atuando. Esta associação de vetores de força com pontos no espaço é chamada de ***campo gravitacional da Terra*** e define um **campo vetorial** chamado de **campo de força.**

Os campos escalares já foram estudados em muitos dos seus aspectos. Vamos agora nos detalhar nos campos vetoriais.

Consideremos um campo vetorial e um sistema de coordenadas XYZ. Vamos associar a cada ponto P(x,y,z) o vetor **F**(x,y,z). Uma vez que as componentes de F(x,y,z) dependem das coordenadas podemos escrever **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h(x,y,z) **k**, onde f, g e h são funções escalares nas variáveis x, y e z.

Um **campo vetorial** em três dimensões é uma função **F** cujo domínio D é um subconjunto do R^3, que associa cada ponto (x,y,z) de D o vetor **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h(x,y,z) **k**, onde f, g e h são funções escalares nas variáveis x, y e z.

Observações:

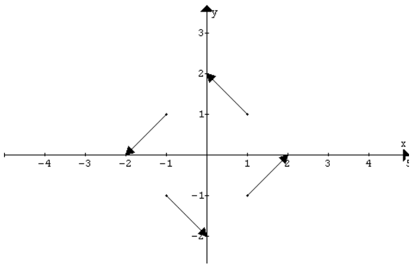
1. Analogamente podemos considerar $D \subset R^2$ e F(x,y) = f(x,y) **i** + g(x,y) **j**
2. Podemos usar uma notação compacta vetorial identificando o ponto P(x,y,z) com o raio vetor **r** = x **i** + y **j** + z **k** e indicando simplesmente **F**(**r**)

Exemplo: Considere o campo vetorial **F**(x,y) = −y **i** + x **j**. Descreva o campo vetorial, representando geometricamente alguns valores para **F** .

Solução:

Vejamos alguns valores:

(x,y)	F(x,y)
(1,1)	− **i** + **j**
(−1, 1)	− **i** − **j**
(1, −1)	**i** + **j**
(−1, −1)	**i** − **j**



2.2 Gradiente. Divergência e Rotacional.

Uma classe importante de campos vetoriais surge na determinação de gradientes de funções escalares. Lembremos que se f é uma função de três variáveis o gradiente de f foi definido como sendo o vetor $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$. No caso de f ser função de duas variáveis temos $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$. Assim, o gradiente de f é um campo vetorial definido por F(x,y,z) = $\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) i + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) j + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) k$ e é chamado de **campo gradiente**.

Usando uma notação mais compacta: ∇ f(x,y,z) = f_x(x,y,z) **i** + f_y(x,y,z) **j** + f_z(x,y,z) **k**

Exemplo: (a) O campo gradiente de f(x,y) = x + y é ∇f(x,y) = **i** + **j** , ou seja, é o mesmo em cada ponto (x,y).

(b) O campo gradiente de f(x,y) = $\sqrt{(25-x^2-y^2)}$ é ∇ f(x,y) = $-x/\sqrt{(25-x^2-y^2)}$ **i** + $(-y)/\sqrt{(25-x^2-y^2)}$ **j**.

(Fazer: desenhar curvas de nível, localizar alguns pontos e vetores)

Onde as curvas de nível são mais próximas o vetor gradiente possui maior valor;

O vetores gradientes são perpendiculares as curvas de nível.

As curbas de nível mais próximas indicam que a taxa de variação é maior naquela região.Vamos agora definir duas operações importantes dos campos vetoriais: a **divergência** e o **rotacional** do campo.

Se **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h(x,y,z) **k** definimos:

- a ***divergência*** de **F**, denotada por div **F**, como a função escalar

$$\text{div}F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

- o ***rotacional*** de F, denotado por rot F, pela função vetorial

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) k$$

Observações:

1. Tanto div F como rot F dependem do ponto em que estão sendo calculados. O mais apropriado é escrever divF(x,y,z) e rotF(x,y,z), mas, para facilitar a notação escrevemos simplesmente divF e rotF ficando subentendido que devem ser calculados no ponto (x,y,z).
2. A **divergência tem valores escalares** e o **rotacional valores vetoriais** sendo, portanto, ele próprio, um campo vetorial.
3. Os nomes divergência e rotacional originaram-se no estudo do fluxo de um fluido.
4. A divergência refere-se à maneira como o fluido flui para, ou afasta-se de um ponto. Quando a divergência é positiva em um ponto de um fluido, a sua densidade está diminuindo com o tempo e o fluido está se expandindo. Quando a divergência é negativa vale o oposto e se a divergência é zero em todos os pontos de uma região o fluxo de entrada é igual ao de saída.
5. O rotacional se refere às propriedades de rotação do fluido num ponto. Tem também importância na análise de campos de forças eletromagnéticos. O rotacional de um campo elétrico nulo, por exemplo, caracteriza que somente forças eletrostáticas estão presentes no campo elétrico.

Antes de darmos exemplos do cálculo do rotacional e da divergência vamos relacionar essas operações com o gradiente.

2.1 O operador ∇

Vamos interpretar o símbolo do gradiente ∇ como um operador, ou seja,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \quad \text{(chamado de } \textbf{operador Gradiente ou operador Nabla}\text{)}$$

quando aplicado sobre a função escalar f(x,y,z) produz o gradiente $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$. Podemos fazer analogia com o operador derivada $\frac{d}{dx}$ que quando aplicado a f(x) produz f´(x).

O operador ∇ nos permite reescrever as definições de rotacional e divergência usando uma notação vetorial e relacionando-os com os produtos escalar e vetorial

- Se **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h(x,y,z) **k**, então a ***divergência*** de **F** é dada por

$$\operatorname{div}F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right) \cdot (f(x,y,z)\,\mathbf{i} + g(x,y,z)\,\mathbf{j} + h(x,y,z)\,\mathbf{k}) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

- Se **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h(x,y,z) **k**, então o ***rotacional*** de F, é dado por

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)k$$

Observações:

1. O "produto escalar" da divergência não é verdadeiramente um produto escalar. Tem a "forma" de um produto escalar. O mesmo vale para o "determinante" do rotacional.

2. Os produtos $\frac{\partial}{\partial x}\cdot f$ e $\frac{\partial}{\partial y}\cdot g$ e $\frac{\partial}{\partial z}\cdot h$ que aparecem em ambas as expressões devem ser interpretados como $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}$, etc.

Exemplo: Para a função $F(x,y,z) = (3x + y)\,\mathbf{i} + xy^2z\ \mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k}$ calcule: rotF e divF

Solução:

$$\text{div}F = \nabla\cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\cdot((3x+y)\,\mathbf{i} + xy^2z\ \mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k}) = \frac{\partial(3x+y)}{\partial x}+\frac{\partial(xy^2z)}{\partial y}+\frac{\partial(xz^2)}{\partial z} = 3 + 2xyz + 2xz.$$

$$\text{rot}F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x+y & xy^2z & xz^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(xz^2)}{\partial y}-\frac{\partial(xy^2z)}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial(3x+y)}{\partial z}-\frac{\partial(xz^2)}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial(xy^2z)}{\partial x}-\frac{\partial(3x+y)}{\partial y}\right)k$$

$$= -\,xy^2\,\mathbf{i} - z^2\,\mathbf{j} + (y^2z - 1)\,\mathbf{k}.$$

2.2 Propriedades do gradiente, do rotacional e da divergência

Sejam F(x,y,z) e G(x,y,z) campos vetoriais, f(x,y,z) e g(x,y,z) funções escalares e k uma constante. Supondo que todas as derivadas envolvidas existem e são contínuas, valem as seguintes propriedades:

1. $\nabla(kf) = k\,\nabla f$
2. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
3. $\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$
4. $\text{div}(k F) = k\,\text{div}\,F$
5. $\text{div}(F + G) = \text{div}\,F + \text{div}\,G$
6. $\text{div}(f F) = f\,\text{div}\,F + \nabla f\cdot F$
7. $\text{rot}(F + G) = \text{rot}\,F + \text{rot}\,G$
8. $\text{rot}(f F) = f\ \text{rot}\,F + \nabla f \times F$
9. $\text{div rot}F = 0$
10. $\text{rot}(\nabla f) = 0$

Vamos dar exemplos para confirmar as propriedades 9 e 10

Exemplo: Sejam $F(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + xz$. Verifique que

a) div rotF = 0

Solução: $\text{rot}F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z)}{\partial y}-\frac{\partial(xy)}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial(x^2)}{\partial z}-\frac{\partial(z)}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial(xy)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2)}{\partial y}\right)k = y\,\mathbf{k}$

$\Rightarrow \text{div}(y\,\mathbf{k}) = 0.$

b) rot(∇f) = 0

Solução: $\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)(x^2 + y^3 + xz) = (2x+z)\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

$$\text{rot}(\nabla f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z & 3y^2 & x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x)}{\partial y}-\frac{\partial(3y^2)}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial(2x+z)}{\partial z}-\frac{\partial(x)}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial(3y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2x+z)}{\partial y}\right)k = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

2.3 Campos Conservativos

- Uma questão que se coloca é: dado um campo vetorial F(x,y,z), será que F é um campo gradiente? Ou seja, existe uma função escalar u(x,y,z) tal que F(x,y,z) = ∇u(x,y,z)? Se existe, qual é esta função?

Este problema é muito importante em várias aplicações e tais campos têm uma terminologia própria que colocaremos a seguir

- Dizemos que um campo vetorial **F** é ***conservativo*** numa determinada região se for o campo gradiente de alguma função escalar **u** naquela região, ou seja, **F** é conservativo se existe **u** (x,y,z) tal que ∇**u**(x,y,z) = **F**(x,y,z)

- A função **u**(x,y,z) nesse caso é chamada de ***função potencial*** e **u**(x,y,z) é o potencial no ponto P(x,y,z)

Exemplo: *O* campo F(x,y,z) = 2x **i** – 6y **j** + 8z **k** é conservativo pois existe a função

u(x,y,z) = $x^2 - 3y^2 + 4z^2$ tal que ∇**u**(x,y,z) = **F**(x,y,z). A função **u**(x,y,z) = $x^2 - 3y^2 + 4z^2$ é a função potencial do campo

Observações:

1. Vimos que se um ponto $P_o(x_o,y_o,z_o)$ está no domínio de u, então o vetor gradiente $\nabla u(x_o,y_o,z_o)$ é normal à superfície de nível S de f que contém P_o.
2. A superfície S é o gráfico da equação $u(x,y,z) = u(x_o,y_o,z_o)$.
3. Todo vetor $F(x_o,y_o,z_o)$ em um campo vetorial conservativo é normal à superfície de nível de uma função potencial u para F, que contém $P_o(x_o,y_o,z_o)$

Um outro resultado importante é:

Seja F(x,y,z) =f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h(x,y,z) **k** um campo vetorial tal que f, g e h são contínuas com derivadas parciais contínuas em uma determinada região convenientemente restrita.

Então, F é conservativo se, e somente se, rot F = 0

D] Se F é um campo conservativo, então existe uma função escalar u(x,y,z) tal que F(x,y,z) = ∇u. Pela propriedade 9 rot (∇u) = 0. De fato:

$$F(x,y,z) = u_x\, i + u_y\, j + u_z\, k \Rightarrow \text{rot}F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) k = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}.$$

Observemos que as derivadas nos parênteses correspondem respectivamente a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{ Teorema de Schwarz })$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) \text{ é um campo conservativo } \Leftrightarrow \text{rot}\mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

No caso do campo F se bidimensional temos que,

Se f(x,y) e g(x,y) tem derivadas contínuas em uma região D, então
F(x,y) = f(x,y) i + g(x,y) j é um campo conservativo, se e somente se $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$

O caso bidimensional é um caso particular do tridimensional $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ f & g & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$

2.4 Cálculo da Função Potencial

O método para encontrar a função potencial u(x,y) é o mesmo utilizado na resolução de equações diferenciais exatas

O Teorema nos diz que se $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ então a F(x,y) = $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$ para alguma função u. Logo, u(x,y) é tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y)$ (I) e $\frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y)$ (II)

Da condição (I) obtemos que $u(x, y) = \int f(x, y)dx + k(y)$, onde a integral está sendo calculada em relação à variável x, ou seja, y é considerado "constante". Por isso, aparece a função k(y) desempenhando o papel da "constante de integração" .
Se encontrarmos a função k(y) a nossa função u(x,y) está completa e o problema resolvido.
Para encontrarmos a função k(y) aplicamos a condição (II), ou seja, derivamos u em relação a y e igualamos a g. Chegamos a uma expressão para k´(y) e através de integração obtemos k(y)

Exemplo: Mostre que o campo é conservativo e encontre a função potencial nos seguintes casos:

1) F(x,y) = (2xy + 1) **i** + (x^2 + 4y) **j**

Solução:

f(x,y) = 2xy + 1 e g(x,y) = x^2 + 4y. Como $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = \frac{\partial g}{\partial x}$, logo o campo é conservativo. Existe uma função u(x,y) tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y) = 2xy + 1$ (I) e $\frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y) = x^2 + 4y$ (II)

Consideremos a condição (I) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 1$. Podemos integrar a função, considerando y constante e obter $u(x, y) = \int (2xy + 1)dx + k(y)$. A "constante" de integração é uma função k(y), uma vez que consideramos y constante na integração.
Logo, u(x,y) = x^2y + x + k(y). Se encontrarmos a função k(y) o problema está resolvido.

Para isto, aplicamos a condição (II) $\frac{\partial u}{\partial y} = g = x^2 + 4y$. Derivando u em relação a y e igualando a g(x,y) obtemos: $x^2 + k'(y) = x^2 + 4y$. Logo, $k'(y) = 4y$ e $k(y) = \int 4y dy = 2y^2 + K$

Logo, a função $u(x,y) = x^2y + x + 2y^2$ é uma função potencial para o campo F.

2) $F(x,y,z) = \operatorname{sen}x\,\mathbf{i} - 2yz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$

Sol.: rot F= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \operatorname{sen}x & -2yz & -y^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-2yz)}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial(\operatorname{sen}x)}{\partial z} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial((-2yz)}{\partial x} - \frac{\partial(\operatorname{sen}x)}{\partial y}\right)k = 0.$

Para encontrarmos a função u(x,y,z) aplicamos a condição que $\nabla u = F$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{sen}x \quad (I); \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2yz \quad (II); \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -y^2 \quad (III)$$

De (I) temos que $u(x,y,z) = \int \operatorname{sen} x dx + k_1(y,z) = -\cos x + k_1(y,z)$. Derivando u em relação a y e igualando a (II): $\frac{\partial k_1}{\partial y} = -2yz$. Integrando em relação a y obtemos $k_1(y,z) = -y^2 z + k_2(z)$

Temos assim que $u(x,y,z) = -\cos x - y^2z + k_2(z)$.

Derivando u em relação a z e igualando a (III): $-y^2 + k_2'(z) = -y^2 \Rightarrow k_2(z) = C$

Como queremos uma função potencial fazemos C = 0 e a função potencial fica $u(x,y,z) = -\cos x - y^2z$.

Referências Bibliográficas:

1. O Cálculo com Geometria Analítica – Swokowski vol 2
2. Cálculo – Um novo horizonte – Anton vol2
3. Cálculo C – Diva Fleming