Centro Universitário da Bahia

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral III — Semestre: 2013.1

Professor: *Adriano Cattai* — Data: 08/04/2013

Nome: ______________________________

1^a Avaliação da Aprendizagem

Instruções:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Seja organizado. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Nunca ande somente pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros já foram." (Graham Bell)

Boa Prova!

Q. 1 (4,0)***.*** Responda cada item abaixo:

(a) A função $y = x^2\ln(x)$ não é solução da EDO $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$?

(b) Qual deve ser o valor de a para que $y = e^{ax}$ seja solução da EDO $y'' - y = 0$?

(c) As EDO's $x^2y''' - \dfrac{3xy''}{x-3} - (x^2-9)y = \pi y$ e $\text{sen}(t)\dfrac{d^3u}{dt^3} + 3u\dfrac{d^2u}{dt^2} - (t^2-9)\dfrac{du}{dt} = \pi^4$ são lineares e de mesma ordem?

(a) Com $y' = 2x\ln(x) + x$ e $y'' = 2\ln(x) + 3$, temos que

$$x^2[2\ln(x)+3] - 3x[2x\ln(x)+x] + 4[x^2\ln(x)] = 2x^2\ln(x) + 3x^2 - 6x^2\ln(x) - 3x^2 + 4x^2\ln(x) = 0.$$

Deste modo, afirmamos que $y = x^2\ln(x)$ é solução da EDO.

(b) Notemos que $y' = ae^{ax}$ e $y'' = a^2e^{ax}$. Agora, $y = e^{ax}$ será solução da EDO se $a^2e^{ax} - e^{ax} = 0$. Desta última, temos que $e^{ax}(a^2-1) = 0$ implicando que $a = \pm 1$, uma vez que $e^{ax} \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(c) Elas são de mesma ordem (terceira) mas, a segunda EDO não é linear. A parcela $3u\dfrac{d^2u}{dt^2}$ não é linear.

Q. 2 (2,0)***.*** Determine a solução da EDO separável $y - (1 + y - x - xy)y' = 0$.

Separando as variáveis, temos:

$$ydx = [1 + y - x(1+y)]dy \Rightarrow ydx = (1+y)(1-x)dy \Rightarrow \frac{1}{1-x}dx = \frac{1+y}{y}dy \Rightarrow -\frac{1}{x-1}dx = \left(\frac{1}{y}+1\right)dy.$$

Integrando a última igualdade, temos $-\ln(x-1) = \ln(y) + y + k$, que é a solução implícita da EDO.

Q. 3 (2,0)***.*** Resolva a EDO $e^x + x^3y' + 4x^2y = 0$.

Primeiramente, vemos que EDO pode ser escrita como $y' + 4x^{-1}y = -x^{-3}e^x$. Deste modo temos $P(x) = 4x^{-1}$ donde, o fator integrante será dado por $\mu(x) = \exp\{\int 4x^{-1}dx\}$. Como $\int 4x^{-1}dx = 4\int \frac{1}{x}dx = 4\ln(x)$, concluimos que:

$$\mu(x) = \exp\{4\ln(x)\} = \exp\{\ln(x^4)\} = x^4.$$

Agora, multiplcando a EDO $y' + 4x^{-1}y = -x^{-3}e^x$ por $\mu(x)$, temos:

$$x^4y' + 4x^3y = -xe^x \Rightarrow [x^4y]' = -xe^x \Rightarrow y = -x^{-4}\int xe^x\,dx.$$

A integral pode ser resolvida pela fórmual de integração por partes $\int udv = uv - \int vdu$, pondo $u = x$ e $dv = e^xdx$ e, obtendo $e^x(x-1) + k$. voltando à solução, concluímos que:

$$y = \frac{e^x(1-x)+k}{x^4}.$$

Q. 4 (2,0)***.*** Atividades Semanais.