as

Atividades Semanais

— Cálculo III —

Prof. Adriano Pedreira Cattai

A Transformada de Laplace

05

Nome: ______________________________________ Data: ____/____/______

Introdução

Transformações Integrais

As transformações integrais têm grande aplicação na resolução de problemas de física matemática, por exemplo na determinação de resoluções de EDO e EDP.

Definicao 1 Dada uma função $f(t)$, definida num intervalo da reta I, uma *Transformação Integral* tem a forma geral

$$\mathcal{I}[f(t)] = F(s) = \int_I K(t,s)\cdot f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

em que $F(s)$ é denominada a *Transformada* da função $f(t)$, sendo $K(t,s)$ o *núcleo da transformação*.

A operação (1) transforma a função $f(t)$, cuja variável $t \in I$, numa outra função $F(s)$, cuja variável s pertence a um outro conjunto J, em princípio independente de I. Este conjunto pode ser, por exemplo, um intervalo na reta, um semi-plano complexo ou um conjunto dos números reais. Os valores da transformada $F(s)$ são reais ou complexos.

Determinada $F(s)$, a transformada, impõe-se um segundo problema, o qual consiste em retornar à função original. A operação que recupera a função original a partir da sua transformada denomina-se *transformação inversa*. Tem-se, então, um par chamado par de transformações:

$$\begin{cases} F(s) &= \mathcal{I}[f(t)], \\ f(t) &= \mathcal{I}^{-1}[F(s)]. \end{cases} \tag{2}$$

O par representado pela transformada e sua inversa é conhecido como *Par de Transformada*. Usaremos a notação com duas setas em sentidos opostos e o par de funções (f,F) na forma $f(t) \rightleftarrows F(s)$.

Podemos citar, respectivamente, alguns exemplos de operações implementadas através de transformadas e vantagens que as mesmas podem trazer:

✓ Exemplos:
- ⋄ Representação (mais eficiente) do sinal;
- ⋄ Modificação do sinal;
- ⋄ Análise (extração de informação).

✓ Vantagens:
- ⋄ Possibilidade de utilização de suas propriedade matemáticas;
- ⋄ Ênfase de certos aspectos importantes do sinal;
- ⋄ Algoritmos eficientes.

Abaixo, alguns exemplos de transformadas integrais e suas respectivas inversas.

✓ **Transformada Finita**

$$\begin{cases} F(n) &= \mathcal{F}[f(x)] = \displaystyle\int_a^b f(x)\cdot\phi_n(x)\cdot s(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[F(n)] = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{(\phi_n, \phi_n)}\phi_n(x), \quad \text{para } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

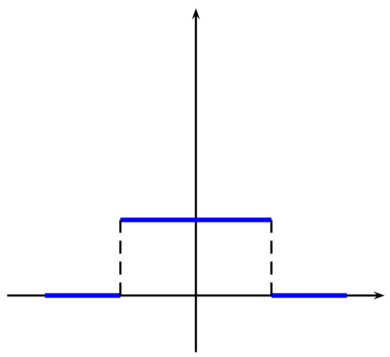
em que $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções ortogonais com peso $s(x)$ no intervalo $[a, b]$.

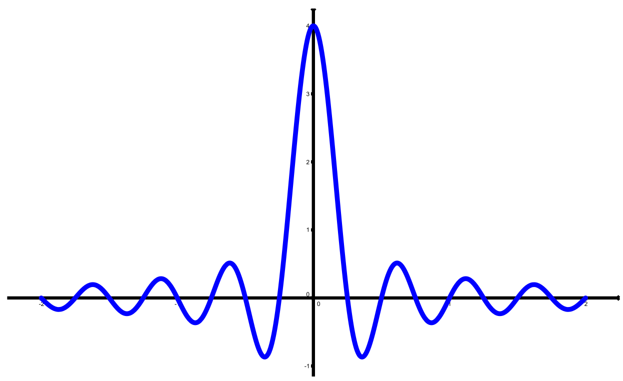
✓ **Transformada de Fourier**

$$\begin{cases} F(k) &= \mathcal{F}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\exp(ikx)\,\mathrm{d}x, \quad \text{para } -\infty < k < \infty, \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(k)\cdot\exp(-ikx)\,\mathrm{d}k, \quad \text{para } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

em que $\exp(x) = e^x$.

Por exemplo, se $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases}$, então $F(k) = \dfrac{2a\,\mathrm{sen}(2\pi ak)}{2\pi ak}$. Assim, temos o par $f \rightleftarrows F$, cujos gráficos estão abaixo.





✓ **Transformada de Hartley**

$$\begin{cases} H(\omega) &= \mathcal{H}[f(t)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\mathrm{cas}(\omega t)\,\mathrm{d}t, \\ f(t) &= \mathcal{H}^{-1}[H(\omega)] = \mathcal{H}[H(\omega)]. \end{cases}$$

em que ω, em aplicações físicas, é a frequência angular e $\mathrm{cas}(t) = \cos(t) + \mathrm{sen}(t)$.

✓ **Transformada de Fourier-Bessel de ordem n**

$$\begin{cases} F(\lambda) &= \mathcal{B}[f(r)] = \displaystyle\int_0^{\infty} f(r)\cdot r\cdot J_n(r\lambda)\,\mathrm{d}r, \quad \text{para } 0 < \lambda < \infty, \\ f(r) &= \mathcal{B}^{-1}[F(\lambda)] = \displaystyle\int_0^{\infty} F(\lambda)\cdot\lambda\cdot J_n(r\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{para } 0 < r < \infty. \end{cases}$$

♡ **Transformada de Laplace** ♡

$$\begin{cases} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)\,\mathrm{d}t, & \text{para } \mathrm{Re}(s) > \alpha (\alpha \text{ constante}), \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)\cdot\exp(st)\,\mathrm{d}s, & \text{onde } \gamma > \alpha, \text{ para } 0 < t < \infty. \end{cases}$$

Linearidade das Transformações Integrais

Com as propriedades de linearidade da integração, percebemos que todas as transformações integrais da forma (1) são transformações lineares, ou seja, a transformada de uma combinação linear de duas funções é a mesma combinação linear das respectivas transformadas:

$$\mathcal{I}[\alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)] = \alpha\cdot\mathcal{I}[f(x)] + \beta\cdot\mathcal{I}[g(x)], \tag{3}$$

em que α e β são constantes. Em especial,

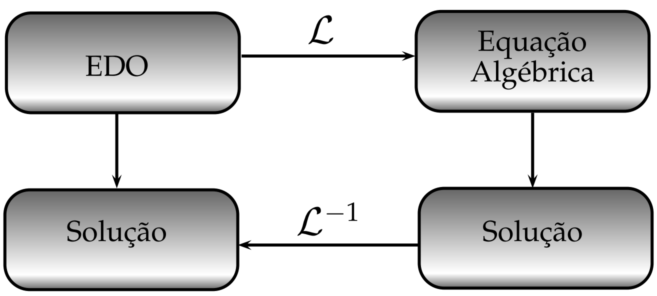
$$\mathcal{L}[\alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)] = \alpha\cdot\mathcal{L}[f(x)] + \beta\cdot\mathcal{L}[g(x)].$$

A Transformada de Laplace

Um engenheiro eletricista inglês, Oliver Heaviside (1850-1925), quando estudava processos simples para obter soluções de Equações Diferenciais, vislumbrou um método de Cálculo Operacional que leva ao conceito matemático da Transformada de Laplace, que é um método simples para transformar um Problema com Valores Iniciais (PVI), em uma equação algébrica, de modo a obter uma solução deste PVI de uma forma indireta, sem o cálculo de integrais e derivadas para obter a solução geral da Equação Diferencial. Pela utilidade deste método em Matemática, na Computação, nas Engenharias, na Física e outras ciências aplicadas, o método representa algo importante neste contexto.

A transformada de Laplace é muito usada em diversas situações, porém, aqui trataremos de sua aplicação na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares. Tem seu nome em homenagem ao matemático francês Pierre Simon Laplace, que a estou em 1782. No entanto, as técnicas descritas aqui, no Cálculo III, foram desenvolvidas um século depois ou mais tarde e, que se devem principalmente a O. Heaviside.

As propriedades desta transformada tornam-na útil para a análise de sistemas dinâmicos lineares. A vantagem mais interessante desta transformada é que a integração e a derivação tornam-se multiplicações e divisões, da mesma maneira que o logaritmo transforma a multiplicação em adição. Ela permite levar a resolução de equações diferenciais à resolução de equações polinomiais, que são muito mais simples de resolver, como ilustra o diagrama abaixo.



Preliminares para a Transformada de Laplace

Como a Transformada de Laplace envolve uma integral de zero a infinito, que é uma *integral imprópria*, é necessário concimento sobre integrais deste tipo, que envolve limite no infinito e, obviamente, o conhecimento de técnicas de integração, em especial a integração por partes. Para o cálculo de limites indeterminados, a Regra de L'Hôspital será muito útil. E, por fim, outro importante tópico é a decomposição de uma fração em soma de frações, a qual utilizaremos na obtenção da transformada inversa. Sugiro que faça uma forte revisão nesses importantes tópicos.

Definição da Transformada de Laplace

Definicao 2 Se, dada uma função $f = f(t)$ (real ou complexa) definida no intervalo semi-infinito $[0, \infty)$ e o parâmetro z, um número complexo da forma $z = s + iv$, de modo que para cada $s > 0$ ocorre a convergência da integral imprópria

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-zt}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

então a função $F(z)$ definida pela integral acima, recebe o nome de *Transformada de Laplace* da função $f(t)$ e denotamos $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Se o parâmetro z é um número real, isto é, a parte imaginária $v = 0$, usamos $z = s > 0$ e a definição fica simplesmente na forma

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Pela transformada de Laplace, a função $f(t)$, na variável t, é levada numa outra função, $F(s)$, na variável s, denominada *variável da transformada*. Representaremos a função original por uma letra minúscula e a sua variável por t, e a sua transformada de Laplace pela letra correspondente maiúscula e a sua variável s. Por exemplo, as transformadas de Laplace das funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ serão representadas por $F(s)$, $G(s)$ e $H(s)$, respectivamente, ou seja:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)], \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \quad \text{e} \quad H(s) = \mathcal{L}[h(t)].$$

É importante observar que, mesmo que a função $f(t)$ não esteja definida num intervalo contido estritamente no intervalo $[0, \infty)$, a transformação de Laplace considera apenas os valores de $f(t)$ nesse intervalo. Desta maneira, podemos supor, sem perda de generalidade, que todas as funções para as quais se considera a transformada de Laplace se anulem para $t < 0$. A chamada função *degrau unitário* ou *função de Heaviside*, definida a seguir, fornece uma conveniente expressão desses fatos.

A função de Heaviside $u_0(t)$ é definida por

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0, \\ 1, & \text{para } t \geq 0. \end{cases}$$

Assim, para toda função $f(t)$, definida num intervalo que contém o intervalo $[0, \infty)$, consideremos

$$f(t) = f(t) \cdot u_0(t).$$

É conveniente também introduzirmos a função degrau unitário *deslocada*, $u_a(t)$, para a real, a saber:

$$u_a(t) = u_0(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a, \\ 1, & \text{para } t \geq a. \end{cases}$$

Exemplo 1 Como a função de Heaviside $u_0(t)$, para $t \geq 0$, é igual a 1, então sua transformada de Laplace é $U_0(s) = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$, pois:

$$\begin{aligned} U_0(s) &= \mathcal{L}[u_0(t)] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^A \\ &= \lim_{A\to\infty}\left(\frac{e^{-sA}}{-s} - \frac{e^{-s\cdot 0}}{-s}\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{se^{sA}} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}, \ \ s > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$.

Exemplo 2 A Transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ é $F(s) = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$, pois:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^A \\ &= \lim_{A\to\infty}\left(\frac{e^{(a-s)A}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{(a-s)e^{(s-a)A}} + \frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{s-a}, \ \ s > a. \end{aligned}$$

Observação 1 Temos que $\mathcal{L}[e^t] = \mathcal{L}[e^{1\cdot t}] = \dfrac{1}{s-1}$ e que $\mathcal{L}[ke^{at}] = k \cdot \mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{k}{s-a}$.

Exemplo 3 A transformada de Laplace das funções (a) $f(t) = t$ e (b) $g(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, são $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$ e $G(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$. De fato:

(a) Como $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t$ e $f(t) = t$, então:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[t] = \int_0^\infty t \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \int_0^A te^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{-t}{se^{st}} - \frac{1}{s^2e^{st}}\right|_0^A \\ &= \lim_{A\to\infty} \frac{-A}{se^{sA}} - \frac{1}{s^2e^{sA}} + \frac{0}{se^{s\cdot 0}} + \frac{1}{s^2e^{s\cdot 0}} = \lim_{A\to\infty}\frac{-A}{se^{sA}} - \lim_{A\to\infty}\frac{1}{s^2e^{sA}} + \lim_{A\to\infty}\frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{A\to\infty}\frac{-1}{s^2e^{sA}} - 0 + \frac{1}{s^2} = 0 - 0 + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2}, \end{aligned}$$

em que o limite $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\frac{-A}{se^{sA}}$ apresenta a forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$ e foi calculado com a regra de L'Hôspital, na variável A.

(b) Como $G(s) = \int\limits_0^\infty g(t) \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t$ e $g(t) = t^n$, então $G(s) = \int\limits_0^\infty t^n \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_0^A t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t$.

Vamos usar integração por partes para calcular a integral indefinida correspondente:

$$\begin{cases} u = t^n & \Longrightarrow \quad du = nt^{n-1}dt \\ dv = e^{-st}dt & \Longrightarrow \quad v = \dfrac{e^{-st}}{-s} \end{cases} \Longrightarrow \int t^n \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{-t^n}{se^{st}} + \frac{n}{s}\int t^{n-1}e^{-st}dt$$

Temos assim,

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty t^n \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{A\to\infty} \left.\frac{-t^n}{se^{st}}\right|_0^A + \frac{n}{s}\int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{-A^n}{se^{sA}} - \frac{-0^n}{se^{s\cdot 0}}\right] + \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}] \\ &= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{-A^n}{se^{sA}}\right] + \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}] = 0 + \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}]. \end{aligned}$$

Hora, como $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}]$, então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\mathcal{L}[t^{n-2}] = \frac{n(n-1)}{s^2}\cdot\frac{n-2}{s}\mathcal{L}[t^{n-3}] = \dots \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{s^n}\mathcal{L}[t^{n-n}] = \frac{n!}{s^n}\cdot\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

Pode-se comprovar que $\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{A^n}{se^{sA}} = 0$, usando-se L'Hôspital (sucessivamente) para baixar o grau de A^n.

Assim, por exemplo, temos: $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$, $\mathcal{L}[t^3] = \frac{6}{s^4}$, $\mathcal{L}[t^4] = \frac{24}{s^5}$ e $\mathcal{L}[t^5] = \frac{120}{s^6}$.

Observação 2 No primeiro exemplo usamos a definição para obter $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$. Podemos ainda obter o mesmo resultado a partir de $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ e $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, como segue abaixo:

$$\mathcal{L}[1] = \begin{cases} \mathcal{L}[e^{0\cdot t}] = \dfrac{1}{s-0} = \dfrac{1}{s}, \\ \mathcal{L}[t^0] = \dfrac{0!}{s^{0+1}} = \dfrac{1}{s}. \end{cases}$$

Exemplo 4 A partir da fórmula de Euler $e^{ibt} = \cos(bt) + i\cdot\mathrm{sen}(bt)$, da transformada $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ (obtida no exemplo 2) e da linearidade da transformação (dada em (3)), podemos obter a transformada de Laplace das funções $f(t) = \cos(bt)$ e $g(t) = \mathrm{sen}(bt)$, $b \in \mathbb{R}$. De fato, transformando e^{ibt}, temos:

$$\mathcal{L}[e^{ibt}] = \frac{1}{s-ib} = \frac{s+ib}{s^2-(ib)^2} = \frac{s}{s^2+b^2} + i\cdot\frac{b}{s^2+b^2}.$$

Da relação de Euler, $\mathcal{L}[e^{ibt}] = \mathcal{L}[\cos(bt) + i\cdot\mathrm{sen}(bt)] = \mathcal{L}[\cos(bt)] + i\mathcal{L}[\cdot\,\mathrm{sen}(bt)]$. Portanto, comparando as duas expressões para $\mathcal{L}[e^{ibt}]$, temos:

$$\mathcal{L}[\cos(bt)] = \frac{s}{s^2+b^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[\mathrm{sen}(bt)] = \frac{b}{s^2+b^2}.$$

Exemplo 5 Use a linearidade da transformação, conforme em (3), e os resultados acima para determinar $\mathcal{L}[f(t)]$ em cada item abaixo:

(a) $f(t) = 2 - 3t + 2t^2$; (b) $g(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t}$; (c) $h(t) = 3\,\text{sen}(2t) - \cos(\sqrt{2}t)$.

Solução:

(a) $F(s) = \mathcal{L}[2 - 3t + 2t^2] = 2\mathcal{L}[1] - 3\mathcal{L}[t] + 2\mathcal{L}[t^2] = \dfrac{2}{s} - \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{4}{s^3} = \dfrac{2s^2 - 3s + 4}{s^3}$;

(b) $G(s) = \mathcal{L}[3e^{-t} + 5e^{2t}] = 3\mathcal{L}[e^{-t}] + 5\mathcal{L}[e^{2t}] = \dfrac{3}{s+1} + \dfrac{5}{s-2} = \dfrac{8s-1}{s^2 - s - 2}$;

(c) $H(s) = 3\mathcal{L}[\text{sen}(2t)] - \mathcal{L}[\cos(\sqrt{2}t)] = \dfrac{6}{s^2+4} - \dfrac{s}{s^2+2} = \dfrac{12 - 4s + 6s^2 - s^3}{(s^2+4)(s^2+2)}$.

Definimos a transformada de Laplace como sendo um operador integral que "transforma" uma função $f(t)$ para uma função $F(s)$. Consideremos agora o problema de achar a função $f(t)$ quando é dada a transformada $F(s)$. Ou seja, buscamos a transformada inversa.

Definicao 3 Dada uma função $F(s)$, se houver uma função $f(t)$ que seja contínua em $[0, +\infty)$ e satisfaça $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, dizemos que $f(t)$ é a *transformada de Laplace inversa* de $F(s)$ e empregamos a notação $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

A técnica que usamos para determinar a transformada inversa é baseada na expansão da transformada em soma de frações paraciais que, combinado com a linearidade da transformada, podemos comparar com as transformadas elementares exibidas na tabela de transformadas. Como ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo 6 Em cada item abaixo, determine a transformada de Laplace inversa.

(a) $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2 - s - 2}$; (b) $G(s) = \dfrac{s^2}{s^4 - 1}$.

Solução:

(a) Primeiramente, vemos que o denominador é fatorável, $s^2 - s - 2 = (s-2)(s+1)$, donde a expansão em soma de frações parciais é:

$$\frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = \dfrac{1}{3}$ e $B = \dfrac{2}{3}$. Portanto,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2 - s - 2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}\right] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = \frac{e^{2t} + 2e^{-t}}{3}.$$

(b) Primeiramente, vamos decomporto o denominador em fatores: $s^4 - 1 = (s^2 - 1)(s^2 + 1) = (s - 1)(s + 1)(s^2 + 1)$. Deste modo, a decomposição será:

$$\frac{s^2}{s^4 - 1} = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = 0$ e $D = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{s^4-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/4}{s-1} - \frac{1/4}{s+1} + \frac{1/2}{s^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) = \frac{e^t - e^{-t} + 2\operatorname{sen}(t)}{4}. \end{aligned}$$

Exemplo 7 Em cada item abaixo, determine a transformada de Laplace inversa.

(a) $F(s) = \dfrac{2s^2 - 3s + 4}{s^3}$; (b) $G(s) = \dfrac{8s - 1}{s^2 - s - 2}$; (c) $H(s) = \dfrac{-s^3 + 6s^2 - 4s + 12}{(s^2 + 4)(s^2 + 2)}$.

Solução:

(a) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s^2 - 3s + 4}{s^3}\right] = \ldots$

(b) $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{8s - 1}{s^2 - s - 2}\right] = \ldots$

(c) $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-s^3 + 6s^2 - 4s + 12}{(s^2 + 4)(s^2 + 2)}\right] = \ldots$

A existência da Transformada de Laplace e funções admissíveis

A convergência da integral em (5) pode ser garantida para uma classe bastante ampla de funções, chamadas *funções admissíveis*. Estas abrangem praticamente todas as funções encontradas nas aplicações usuais da física matemática e da engenharia. Para assegurarmos a existência de certas integrais no intervalo semi-infinito $[0, \infty)$ imporemos a $f(t)$ restrições complementares.

Uma função $f(t)$, para $0 \leq t < \infty$, é dita *admissível* quando valem as condições:

(a) $f(t)$ é uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$, isto é, f é descontínua em um número finito de pontos;

(b) Existem duas constantes positivas M e α tais que, para todo $t \in [0, \infty)$, vale a desigualdade

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}, \text{ para } 0 \leq t < \infty.$$

$\diamond$ Neste caso dizemos também que f é de ordem (tipo) exponencial α sobre $[0, \infty)$, o que é equivalente a $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\alpha t} f(t) = 0$.

$\diamond$ As seguintes funções são exemplos de funções dessa ordem: $t^n e^{at}\cos(bt)$ e $t^n e^{at}\operatorname{sen}(bt)$.

Salvo menção explícita em contrário, as funções consideradas em nosso estudo são todas admissíveis. Consideremos $f(t) \cdot e^{-zt}$, em que $z = s + iv$ com $s > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{-zt} \cdot f(t) &= e^{-(s+iv)t} \cdot f(t) = e^{-st} \cdot e^{-ivt} \cdot f(t) \\ &= e^{-st} \cdot [\cos(-vt) + i \operatorname{sen}(-vt)] \cdot f(t) \\ &= e^{-st} \cdot f(t) \cdot \cos(vt) - ie^{-st} \cdot f(t) \cdot \operatorname{sen}(vt). \end{aligned}$$

Agora,

$$\int_0^\infty e^{-zt} \cdot f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot \cos(vt)\, dt - i \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot \operatorname{sen}(vt)\, dt.$$

Como f é admissível, ou seja, existem constantes positivas M e α tais que $|f(t)| < Me^{\alpha t}$, temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot \cos(vt)\, dt \right| &\leq \int_0^\infty \left| e^{-st} \cdot f(t) \cdot \cos(vt) \right| dt = \int_0^\infty \left| e^{-st} \right| \cdot |f(t)| \cdot |\cos(vt)|\, dt \\ &< \int_0^\infty e^{-st} \cdot M \cdot e^{\alpha t}\, dt = M \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \frac{M}{s - \alpha}, \quad s > \alpha. \end{aligned}$$

Analogamente, como $|i| = 1$, tem-se $\left| i \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot \operatorname{sen}(vt)\, dt \right| < \dfrac{M}{s - \alpha}, \quad s > \alpha.$

Assim, $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-zt} \cdot f(t)\, dt$ existe, para toda função f de ordem exponencial.

A hipótese de admissibilidade permite o primeiro resultado importante sobre transformadas de Laplace, o qual, acabamos de demonstrá-lo:

Teorema 1 [Existência] Seja $f(t)$ uma função admissível, de ordem exponencial α no intervalo $[0, \infty)$. Então sua transformada de Laplace, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, existe para toda região do plano complexo tal que $\mathrm{Re}(z) = s > 0$.

Observação 3 A recíproca deste teorema não é verdadeira. Ou seja, uma dada função pode possuir transformada de Laplace e não ser de ordem exponencial, que é o caso da função $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}$.

Propriedades da Transformação de Laplace

A transformada de Laplace tem propriedades muito úteis, que auxiliam bastante a sua determinação e uso. Essas propriedades serão exibidas em formas de teoremas.

Vamos denotar por $\mathcal{E}$ o conjunto de todas as funções contínuas por partes e de ordem exponencial. Note que $\mathcal{E}$ munido das operações usuais de soma de funções e de multiplicação de escalar real por função, é um espaço vetorial. Por $\mathcal{F}$ vamos representar o conjunto de todas as funções reais definidas em intervalos da forma (a_0, ∞) ou $[a_0, \infty)$. Em $\mathcal{F}$ adotamos a soma de duas funções $(f, g \in \mathcal{F})$ como sendo a função cujo domínio é a interseção dos domínios de f e g. Assim, $\mathcal{L}$ é um operador linear, como no teorema abaixo.

Teorema 2 [Linearidade de $\mathcal{L}$] Sejam f e g pertencentes a $\mathcal{E}$ e $k \in \mathbb{R}$. Então, $\mathcal{L}[k \cdot f + g] = k \cdot \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$.

Quando dizemos que o operador $\mathcal{L}$ é linear, dizemos que $\mathcal{L}[f+g]$ e $\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ são iguais para aqueles valores de s onde ambas as funções são iguais.

A transformada de Laplace goza da seguinte propriedade de unicidade, conhecida pelo nome de Teorema de Lerch.

Teorema 3 [de Lerch] Sejam f e g pertencentes a $\mathcal{E}$. Suponha que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, $\forall\, s > s_0$, então $f(t) = g(t)$, $\forall\, t > 0$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Observe que o teorema acima diz que $\mathcal{L}$ é injetora.

Teorema 4 [Comportamento assintótico] Se $f \in \mathcal{E}$, então $\lim\limits_{s \to \infty} \mathcal{L}[f] = 0$.

Prova: Como existem constante M e α tais que

$$|\mathcal{L}[f]| \leq \frac{M}{s-\alpha}, \forall\, s > \alpha,$$

o resultado segue imediatamente. □

Teorema 5 [Deslocamento de $F(s)$] Se $f \in \mathcal{E}$, então $\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a)$.

Prova:

$$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-st}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(s-a)t}\, \mathrm{d}t = F(s-a).$$

□

Teorema 6 [Deslocamento de $f(t)$] Se $f \in \mathcal{E}$, então para qualquer número real positivo a, a transformada de Laplace da função deslocada de f, $f_a(t) = f(t-a) \cdot u_a(t) = f(t-a) \cdot u_0(t-a)$, é dada por $e^{-as}F(s)$, ou seja,

$$\mathcal{L}[f_a(t)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-as}F(s).$$

Prova: Basta aplicar a definição para $f(t-a)$ e aplicar a mudança de variável $z = t - a$ na integral. Feito isso, o integrando será $f(z) \cdot e^{-as} \cdot e^{-sz}$. Agora é só concluir. □

Teorema 7 [Escala (homotetia) em $F(s)$] Se $f \in \mathcal{E}$, então $\mathcal{L}[f(a \cdot t)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$.

Prova: Basta aplicar a definição para $f(at)$ e aplicar a mudança de variável $z = at$ na integral, donde $dt = \dfrac{1}{a}dz$. Feito isso, o integrando será $f(z) \cdot e^{-sz/a}$. Agora é só concluir. □

Resolvendo Problemas de Valor Inicial

Veremos como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver os problemas de valor incial com equações doferenciais lineares. No entanto, além da linearidade, precisaremos de uma fórmula para a transformada da derivada. Esta fórmula é muito importante e exprime a transformada da derivada f' em termos de $\mathcal{L}[f]$.

Teorema 8 Se $f \in \mathcal{E}$, então $\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0)$.

Prova: Por definição, temos $\mathcal{L}[f'(t)] = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t) \cdot e^{-st}\, \mathrm{d}t$. Para a primitiva associada, integramos por partes, pondo $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)\, \mathrm{d}t$, donde:

$$\int f'(t) \cdot e^{-st}\, \mathrm{d}t = f(t) \cdot e^{-st} + s \int e^{-st} \cdot f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Assim,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{A \to +\infty} f(t) \cdot e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, \mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \frac{f(A)}{e^{-sA}} + s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Como $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{f(A)}{e^{-sA}} = 0$, pelo fato em que $f \in \mathcal{E}$, temos o desejado. □

Observação 4 Usando a fórmula da trasnformada de f', podemos obter a transformada de f'', como segue:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}[(f'(t))'] = s \cdot \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = s \cdot (s \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0)) - f'(0) = s^2 \cdot \mathcal{L}[f(t)] - s \cdot f(0) - f'(0).$$

De posse da $\mathcal{L}[f''(t)]$ vamos obter $\mathcal{L}[f'''(t)]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'''(t)] &= \mathcal{L}[(f''(t))'] = s \cdot \mathcal{L}[f''(t)] - f''(0) = s \cdot (s^2 \cdot \mathcal{L}[f(t)] - s \cdot f(0) - f'(0)) - f''(0) \\ &= s^3 \cdot \mathcal{L}[f(t)] - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0)) - f''(0). \end{aligned}$$

Seguindo indutivamente, generalizamos:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-1} \cdot f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Roteiro para resolução de um PVI

O processo de resolução consiste de três etapas principais:

1. Aplique a transformada de Laplace nos dois menbros da equação;
2. Use as propriedades da transformada e as condições iniciais para obter uma equação para a transformada de Laplace da solução e depois resolve essa equação para a transformada;
3. Determine a transformada de Laplace inversa da solução pesquisando-a numa tabela ou usando um método apropriado (como a expansão em frações parciais) em combinação com a tabela.

Exemplo 8 Resolva a problema de valor incial dado:

(a) $y' - 2y = e^t$ e $y(0) = 0$

(b) $y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 12$;

(c) $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$ e $y'''(0) = 0$.

Solução: Indicaremos por $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ ou, simplesmente, $Y = \mathcal{L}[y]$.

(a) A transformada de Laplace da equação é

$$\mathcal{L}[y' - 2y] = \mathcal{L}[e^t] \Rightarrow sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow (s-2)Y(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s-1)}$$

Como a expansão em soma de frações parciais é dada por $\dfrac{1}{(s-2)(s-1)} = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s-1}$, temos:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right] = e^{2t} - e^t.$$

(b) A transformada de Laplace da equação é

$$\mathcal{L}[y'' - 2y' + 5y] = \mathcal{L}[-8e^{-t}] \Rightarrow \mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = \frac{-8}{s+1}.$$

Pelas fórmulas das tranformada das derivadas, temos:

$$\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2s - 12.$$

Com estes valores, temos:

$$s^2Y(s) - 2s - 12 - 2(sY(s) - 2) + 5Y(s) = \frac{-8}{s+1} \Rightarrow Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}$$

Assim, basta obter $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}\right] = \ldots = 3e^t\cos(2t) + 4e^t\,\mathrm{sen}(2t) - e^{-t}$.

(c) A transformada de Laplace da equação é

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - 2^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0.$$

Com as condições iniciais dadas e resolvendo para $Y(s)$, temos que $Y(s) = \dfrac{s^2}{s^4 - 1}$. Assim, a solução é dada por $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$. Já fizemos a expansão em soma de frações parciais desta função, que é:

$$\frac{s^2}{s^4 - 1} = \frac{1/4}{s-1} - \frac{1/4}{s+1} + \frac{1/2}{s^2+1}.$$

Portanto,

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(t) = \frac{e^t - e^{-t} + 2\,\mathrm{sen}(t)}{4}.$$

Questões

✎ **Q 1** Use a definição da transformada de Laplace para mostrar que $\mathcal{L}[\cos(bt)] = \dfrac{s}{s^2+b^2}$ e que $\mathcal{L}[\operatorname{sen}(bt)] = \dfrac{b}{s^2+b^2}$.

✎ **Q 2** Use a linearidade e a transformada $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$ para determinar a transformada das funções $f(t) = \cosh(bt) = \dfrac{e^{bt}+e^{-bt}}{2}$ e $g(t) = \operatorname{senh}(bt) = \dfrac{e^{bt}-e^{-bt}}{2}$.

✎ **Q 3** Encontre a transformada de Laplace inversa de cada função dada.

(a) $F(s) = \dfrac{3}{s^2+4}$;

(b) $F(s) = \dfrac{4}{(s-1)^3}$;

(c) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+3s-4}$;

(d) $F(s) = \dfrac{3s}{s^2-s-6}$;

(e) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$;

(f) $F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2-4}$;

(g) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^2-2s+2}$;

(h) $F(s) = \dfrac{8s^2-4s+12}{s^3+4s}$;

(i) $F(s) = \dfrac{1-2s}{s^2+4s+5}$;

(j) $F(s) = \dfrac{6s-9}{s^2+2s+10}$;

(k) $F(s) = \dfrac{3}{(2s+5)^3}$;

(l) $F(s) = \dfrac{6s^2+10s+6}{s^4+s^3}$;

(m) $F(s) = \dfrac{s+4}{s^2+s}$;

(n) $F(s) = \dfrac{2s+3s+2}{s^3+2s^2+s}$;

(o) $F(s) = \dfrac{16s}{(s-3)(s^2+2s+1)}$.

✎ **Q 4** Resolva cada problema de valor incial dado.

(a) $y''+4y'+3y=0$, $y(0)=3$ e $y'(0)=1$;

(b) $y''-y=1$, $y(0)=0$ e $y'(0)=1$;

(c) $y''+y=t$, $y(0)=-1$ e $y'(0)=3$;

(d) $y''+9y'=0$, $y(0)=0$ e $y'(0)=2$;

(e) $y''+2y'-8y=0$, $y(0)=1$ e $y'(0)=8$;

(f) $y''-y=\operatorname{sen}(t)$, $y(0)=1$ e $y'(0)=1$;

(g) $y''-y'=t$, $y(0)=0$ e $y'(0)=0$;

(h) $y''-3y'+2y=e^{2t}$, $y(0)=0$ e $y'(0)=1$;

(i) $y''-2y'-3y=6e^t$, $y(0)=1$ e $y'(0)=3$;

(j) $y'+y=e^{-t}$ e $y(0)=5$.

☺ Você pode checar suas transformadas pelo www.wolframalpha.com. Para obter a transformada, digite "**laplace transform**" e clique no "igual". Em seguida, digite a função, a qual será transformada, no campo "*function to transform*". Para a inversa, digite "**inverse laplace transform**" e clique no "igual". O restante é análogo.

Respostas

☺ **Q 2** $F(s) = \dfrac{s}{s^2-b^2}$ e $G(s) = \dfrac{b}{s^2-b^2}$.

☺ **Q 3** (a) $f(t) = \dfrac{3\operatorname{sen}(2t)}{2}$, (b) $f(t) = 2e^t t^2$, (c) $f(t) = \dfrac{2(e^t-e^{-4t})}{5}$, (d) $f(t) = \dfrac{9e^{3t}+6e^{-2t}}{5}$, (e) $f(t) = e^{-t}\cos(2t)$, (f) $f(t) = \dfrac{e^{2t}+7e^{-2t}}{4}$, (g) $f(t) = 3e^t\operatorname{sen}(t)+2e^t\cos(t)$, (h) $f(t) = 3+5\cos(2t)-2\operatorname{sen}(2t)$, (i) $f(t) = 5e^{-2t}\operatorname{sen}(t)-2e^{-2t}\cos(t)$,

(j) $f(t) = 6e^{-t}\cos(3t) - 5e^{-t}\operatorname{sen}(37)$, (k) $f(t) = \dfrac{3t^2e^{-3t}\sqrt{e^t}}{16}$, (l) $f(t) = 3t^2 + 4t + 2 - 2e^{-t}$, (m) $f(t) = 4 - 3e^{-t}$, (n) $f(t) = 3e^{-t} - 2e^{-t} + 2$, (o) $f(t) = 4te^t - 3e^{-t} + 3e^t$.

☺ **Q 4** (a) $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}$, (b) $y(t) = e^t - 1$, (c) $y(t) = t + 2\operatorname{sen}(t) - \cos(t)$, (d) $y(t) = \dfrac{2\operatorname{sen}(3t)}{3}$, (e) $y(t) = 2e^{2t} - e^{-4t}$, (f) $y(t) = \dfrac{5e^t - e^{-t} - 2\operatorname{sen}(t)}{4}$, (g) $y(t) = e^t - 1 - t - \dfrac{t^2}{2}$, (h) $y(t) = te^{2t}$, (i) $y(t) = \dfrac{7e^{3t} + 3e^{-t} - 6e^t}{4}$ (j) $y(t) = (t+5)e^{-t}$.

Texto composto em LaTeX 2_ε, Cattai, 26 de maio de 2013