as

ATIVIDADES SEMANAIS

— CÁLCULO III —

Prof. ADRIANO PEDREIRA CATTAI

Equações Diferenciais Homogêneas

04

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

Introdução

Já estabelecemos método de resolução para a EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ quando separável, exata, liner ou de Bernoulli. Veremos agora um tipo de quações diferenciais que podemos reescrevê-la como separável ou como linear, por meio de uma substituição ou transformação adequada.

Definicao 1 Se o lado direito da equação diferencial $y' = f(x,y)$ puder ser expresso como uma função da razão $\frac{y}{x}$ somente, então dizemos que a equação é *homogênea*.

Exemplo 1 (a) A equação $(x-y)dx + xdy = 0$ é homogênea, pois podemos reescrevê-la sob a forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} = \frac{y}{x} - 1.$$

(b) A equação $(x-2y+1)dx + (x-y)dy = 0$ não é homogênea, pois reescrevendo a equação como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+1}{y-x} = \frac{1 - 2\frac{y}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{y}{x} - 1}$$

vemos que o lado direito não depende apenas somente de $\frac{y}{x}$ por causa do termo $\frac{1}{x}$.

O Teorema a seguir exibe um teste para homogeneidade da equação.

Teorema 1 Ao substituir x por tx e y por ty no membro direito da equação diferencial $y' = f(x,y)$, então a EDO é homogênea se, e somente se,

$$f(tx,tx) = f(x,y).$$

Exemplo 2 No exemplo anterior, vimos que a EDO $(x-y)dx + xdy = 0$ é homogênea. Vamos comprovar, também, com este teste. Como a equação é equivalente a $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}$, temos que $f(x,y) = \frac{y-x}{x}$. Assim, segue que

$$f(tx,ty) = \frac{ty-tx}{tx} = \frac{t(y-x)}{tx} = \frac{y-x}{x} = f(x,y).$$

O teorema acima é apenas um teste de homogeneidade. Por uma mudança de variável adequada podemos estabelecer um método de resolução da EDO. É o que faremos agora.

1. Certifique que a EDO é homogênea;
2. Substitua $\frac{y}{x}$ por v, obtendo a EDO $\frac{dy}{dx} = F(v)$;
3. Com a mudança de variável acima $v = \frac{y}{x}$, donde $y = xv$ e, pela derivada do produto tem-se
$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx};$$
4. Obtenha a nova EDO separável $v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$;
5. A solução pode ser obtida a partir de
$$\int \frac{1}{F(v) - v} dv = \int \frac{1}{x} dx.$$
6. Por fim, expresse a solução em termos das variáveis originais x e y.

Exemplo 3 Como a EDO $(xy + y^2 + x^2)dx - x^2dy = 0$ é equivalente a
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1,$$
vemos que o lado direito depende somente de $\frac{y}{x}$, logo homogênea. Com a substituição
$$v = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$
ficamos com
$$v + x\frac{dv}{dx} = v + v^2 + 1.$$
Esta EDO é separável, donde
$$\int \frac{1}{v^2 + 1} dv = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \arctan(v) = \ln|x| + C \Rightarrow v = \tan(\ln|x| + C).$$
Retornando às variáveis originais x e y, temos $y = x\tan(\ln|x| + C)$.

Questões

Q 1 Para cada EDO abaixo, verifique a homogeneidade. Resolva as que são homogêneas.

(a) $(x^2 - y)dx - dy = 0$;
(b) $y^{-2}dy + (x^2 - 6x)dx = 0$;
(c) $ydx + x(x+y)dy = 0$;
(d) $2xdy - (x+y)dx = 0$;
(e) $2xydy - (x^2 + y^2)dx = 0$;
(f) $2(x+y)dy - ydx = 0$;
(g) $xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$;
(h) $(x+y)dy + (y-x)dx = 0$;
(i) $xdy - (3x + 2y)dx = 0$;
(j) $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$;
(k) $(xy + y^2)dx - x^2dy = 0$;
(l) $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$;
(m) $xyy' = (y^2 + x\sqrt{y^2 + x^2})dx$;
(n) $3xydy + (y^2 - x^2)dx = 0$.

Dica: use $x = yv$ em (f)

Q 2 Encontre a solução particular que satisfaz a condição inicial dada.

(a) $xdy - (2x\exp(-y/x) + y)dx = 0$, $y(1) = 0$;
(b) $x(x+y)dy - y^2dx$, $y(1) = 1$;
(c) $(x\sec(y/x))dx - xdy = 0$, $y(1) = 0$;
(d) $\left(y - \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$, $y(1) = 0$.

Respostas

Q 1 (a) não é homogênea, (b) não é homogênea, (c) não é homogênea, (d) $x = C(x-y)^2$, (e) $x^2 - Cx = y^2$, (f) $x = Ky^2 - 2y$, (g) $\ln|y| = C - \dfrac{x^2}{2y^2}$, (h) $x^2 - 2xy - y^2 = C$, (i) $y = Cx^2 - 3x$, (j) $\dfrac{y}{x} = \ln\left|\dfrac{(x+y)^2}{Cx}\right|$, (k) $y = \dfrac{-x}{\ln|x| + C}$, (l) $y = \dfrac{x}{\ln|x| + C}$, (m) $\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + C$, (n) $(x^2 - 4y^2)^3x^2 = C$.

Q 2 (a) $\exp(y/x) = \ln(x^2) + 1$, (b) $y = \exp(-y/x + 1)$, (c) $y = x\arcsin(\ln|x|)$, (d) $y = x\sin(-\ln|x|)$.

Texto composto em LaTeX 2_ε, Cattai, 5 de maio de 2013