as

ATIVIDADES SEMANAIS
— CÁLCULO III —
Prof. ADRIANO PEDREIRA CATTAI

03

Equações Diferenciais Exatas

NOME: ____ DATA: ____/____/_______

Introdução

Inicialmente, vamos relembrar o conceito de diferencial total ou exata. Seja $\varphi(x, y)$ uma função de duas variáveis com derivadas parciais $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ contínuas numa região R do plano xy. A **diferencial total** ou **exata** de φ é

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot dy.$$

Na tentativa de simplificar a notação, é comum escrever $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi_x$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi_y$.

Agora, se $\varphi(x, y) = C$, segue-se que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot dy = 0$. Em outras palavras, dada uma família de curvas $\varphi(x, y) = C$, podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem, calculando a diferencial total. Essa EDO será denominada de **EDO exata**, conforme a definição abaixo.

Definicao 1 A expressão $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é uma **diferencial exata** em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $\varphi(x, y)$. Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é chamada de uma **equação diferencial exata** se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata, ou seja, se existir uma função $\varphi(x, y)$ com derivadas parciais contínuas e tais que $\varphi_x(x, y) = M(x, y)$ e $\varphi_y(x, y) = N(x, y)$. Assim, a forma geral da solução da equação é $\varphi(x, y) = C$.

Exemplo 1 A EDO $(2x + e^y)dx + xe^y dy = 0$ é exata pois o membro esquerdo é a diferencial total da função $\varphi(x, y) = x^2 + xe^y$. De fato:

$$\varphi_x = \frac{\partial(x^2 + xe^y)}{\partial x} = 2x + e^y \quad \text{e} \quad \varphi_y = \frac{\partial(x^2 + xe^y)}{\partial y} = 0 + xe^y = xe^y,$$

donde $d\varphi = (2x + e^y)dx + xe^y dy$. Assim, $x^2 + xe^y = C$ é solução geral.

Neste exemplo, exibimos a função $\varphi(x, y)$ que comprova que a equação é exata e dá a sua solução. O nosso objetivo será aprender um método para encontrar a função $\varphi(x, y)$ e consequentemente resolver a equação.

O Teorema a seguir exibe um critério para uma equação ser exata, sem que tenhamos o conhecimento da φ. Não vamos formalizar a demonstração do teorema mas aplicá-lo em casos particulares.

Teorema 1 Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região R do plano xy. Então, a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Dizemos, no exemplo acima, que a EDO $(2x + e^y)dx + xe^y dy = 0$ é exata. Vamos comprovar com este teorema:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x + e^y)}{\partial y} = e^y \ \ e \ \ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(xe^y)}{\partial x} = e^y.$$

Agora, se a EDO fosse $(x^2y + x)dx + (xy^2 + y)dy = 0$, teríamos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(x^2y + x)}{\partial y} = x^2 \ \ e \ \ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(xy^2 + y)}{\partial x} = y^2,$$

ou seja, uma EDO não exata.

O teorema acima apresenta um critério da a EDO ser exata. Agora, descrevemos um roteiro, recorrendo à definição de EDO exata, para a obtenção da função $\varphi(x,y)$.

1. Mostre que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$;

2. Suponha que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y)$ e obtenha φ integrando $M(x,y)$ em relação a x, considerando y constante, obtendo:
$$\varphi(x,y) = \int M(x,y)dx \ + \ g(y),$$
em que $g(y)$ é uma função arbitrária e constante em relação a x;

3. Derive φ obtida em relação a y e compare com $N(x,y)$, pois $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y)$ para obter $g'(y)$;

4. Finalmente, integre $g'(y)$ em relação a y para obter $g(y)$ e, portanto, a solução geral $\varphi(x,y) = C$.

Atenção: Pode-se começar o procedimento acima com a suposição de que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y)$.

Exemplo 2 Já vimos que a EDO $(2x + e^y)dx + xe^y dy = 0$ é exata. Vamos, agora, usar esse dispositivo para determinar a função $\varphi(x,y)$. Da condição $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x + e^y$, integramos em relação a x, considerando y constante, obtemos

$$\varphi(x,y) = \int 2x + e^y dx = x^2 + xe^y + g(y).$$

Derivando φ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 + xe^y + g'(y) = xe^y + g'(y).$$

Como $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y) = xe^y$, segue que $g'(y) = 0$, ou seja, $g(y) = K$, alguma constante. Portanto, podemos concluir que $\varphi(x,y) = x^2 + xe^y + K$ e a solução geral da EDO é $x^2 + xe^y = C$.

Questões

Q 1 Verifique se cada equação diferencial dada é exata.

(a) $(2x-3y)dx+(2y-3x)dy=0$;

(b) $ye^x+e^xy'=0$;

(c) $(3y^2+10xy^2)dx+(6xy-2+10x^2y)dy=0$;

(d) $2\cos(2x-y)-\cos(2x-y)y'=0$;

(e) $4x^3-6xy^2+(4y^3-6xy)y'=0$;

(f) $2y^2e^{xy^2}dx+2xye^{xy^2}=0$;

(g) $(x^2+y^2)^{-1}(xdy-ydx)=0$;

(h) $e^{-x^2-y^2}(xdx+ydy)=0$;

(i) $(x-y)^{-2}(y^2dx+x^2dy)=0$;

(j) $e^y\cos(xy)[ydx+(x+\tan(xy))dy]=0$.

Q 2 Resolva cada EDO exata da questão anterior.

Q 3 Em cada item, encontre a solução do PVI dado.

(a) $\dfrac{y}{x-1}dx+[\ln(x-1)+2y]dy=0,\ y(2)=4$

(b) $e^{3x}(\sin(3y)dx+\cos(3y)dy)=0,\ y(0)=\pi$

(c) $(x^2+y^2)^{-1}(xdx+ydy)=0,\ y(0)=4$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xdx+ydy)=0,\ y(4)=3$

(e) $(2x\tan(y)+5)dx+(x^2\sec^2(y))dy=0,\ y(0)=0$

(f) $(x^2+y^2)dx+2xydy=0,\ y(3)=1$

Respostas

Q 1 Exatas: (a), (b), (c), (d), (g), (h) e (j); Não exatas: (e), (f) e (i).

Q 2 (a) $x^2-3xy+y^2=C$; (b) $ye^x=C$; (c) $3xy^2+5x^2y^2-2y=C$; (d) $\sin(2x-y)=C$; (e) não é exata; (f) não é exata; (g) $\arctan(x/y)=C$; (h) $e^{-x^2-y^2}=C$; (i) não é exata; (j) $e^y\sin(xy)+C$;

Q 3 (a) $y\ln(x-1)+y$=16; (b) $e^{3x}\sin(3y)=0$; (c) $x^2+y^2=16$; (d) $\sqrt{x^2+y^2}=5$; (e) $x\tan(y)=5$; (f) $3xy^2+x^3=36$.

Texto composto em LaTeX 2ε, Cattai, 16 de abril de 2013