as

Atividades Semanais

— Cálculo III —

Prof. Adriano Pedreira Cattai

EDO de Primeira ordem e Fator Integrante

02

Nome: ______________________________ Data: ____/____/______

Introdução

A forma geral para uma EDO linear de ordem n é

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Aqui, a linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x (somente) e que y e todas as suas derivadas são elevadas a primiera potência. Quando $n = 1$, obtemos uma EDO de primeira ordem:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Dividindo a equação acima por $a_1(x)$, temos a forma mais simples de uma EDO de primeira ordem:

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{1}$$

Quando $P(x) = a$ e $Q(x) = b$ são funções contantes, a equação (1) é denominada EDO de primeira ordem com coeficientes constantes. Sua representação geral é $y' = ay + b$ e sua solução pode ser obtida por separação de variáveis

$$\frac{dy}{dx} = a\left(y + \frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{1}{y + b/a}\,dy = a\,dx \Rightarrow \ln|y + b/a| = ax + k_1 \Rightarrow y = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Infelizmente, esse método direto de solução não pode ser usado para resolver a equação (1), de modo que precisamos de um método diferente. A boa notícia é que, para equação do tipo (1), é posível encontrar uma função $\mu(x)$, chamada **fator integrante**, tal que, multiplicando a equação por essa função, podemos escrever o primeiro membro como a derivada de um produto de funções. Depois, basta integrar diretamente. Vejamos com determinar o fator integrante. Multipliando a EDO (1) por $\mu(x)$, temos:

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x).$$

A partir daí, bsucamos a função $\mu(x)$ de maneira que $[\mu(x) \cdot y]' = \mu(x)Q(x)$, donde

$$\mu(x)y' + y\mu'(x) = \mu(x)Q(x). \tag{2}$$

Dividindo (2) por $\mu(x)$, temos:

$$y' + y\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = Q(x). \tag{3}$$

Deste modo, comparando (1) com (3), segue que $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x)$. Separando as variáveis e integrando membro a membro obtemos uma expressão para $\mu(x)$:

$$\frac{\frac{d\mu}{dx}}{\mu} = P \Rightarrow \frac{1}{\mu}\,d\mu = P\,dx \Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int P(x)\,dx \Rightarrow \mu(x) = \exp\left\{\int P(x)\,dx\right\},$$

em que $\exp\{\bigstar\} = e^{\bigstar}$.

Uma vez que $[\mu(x) \cdot y]' = \mu(x)Q(x)$, podemos obter a solução y integrando diretemante:

$$\mu(x) \cdot y = \int \mu(x)Q(x)\, dx \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)\, dx.$$

Equação de Bernoulli

Uma EDO de primeira que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{4}$$

é chamada uma EDO de **Bernoulli**. Observemos que se $n = 0$ ou $n = 1$, a equação de Bernoulli é uma EDO linear e, sua resolução já foi discutida.

Para determinar a solução geral da equação de Bernoulli (4), vamos considerar a mudança de variável $v = y^{1-n}$ que, derivando com respeito a x, temos $\dfrac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$. Assim, multiplicando a equação (4) por $(1-n)y^{-n}$, obtemos:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x).$$

Na variável v, temos

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x),$$

ou seja, uma EDO linear.

Exemplo 1 A EDO de primeira ordem $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = xy^3$ é não-linear e de Benoulli com $n = 3$. Para resolvê-la, iremos transformá-la numa linear com a mudança de variável $v = y^{1-3} = y^{-2}$, donde $\dfrac{dv}{dx} = -2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}$. Assim, multiplicando a EDO por $-2y^{-3}$ e fazendo a substituição da variável, obtemos:

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} + 4xy^{-2} = -2x \ \Rightarrow \ \frac{dv}{dx} + 4xv = -2x.$$

Esta última é linear com $P(x) = 4x$ e $Q(x) = -2x$. O fator integrante é $\mu(x) = \exp\{\int 4x\, dx\} = \exp\{2x^2\} = e^{2x^2}$. Como $[\mu(x) \cdot v]' = \mu(x) \cdot Q(x)$, temos:

$$e^{2x^2} \cdot v = \int -2xe^{2x^2}\, dx \Rightarrow v(x) = \frac{1}{e^{2x^2}} \cdot \int -2xe^{2x^2}\, dx.$$

Com a substituição da variável $t = 2x^2$, obtemos $\int -2xe^{2x^2}\, dx = -\dfrac{e^{2x^2}}{2} + k_1 = -\dfrac{e^{2x^2} + 2k_1}{2}$. Logo,

$$v(x) = -\frac{e^{2x^2} + 2k_1}{2e^{2x^2}} \ \Rightarrow \ y^2 = -\frac{2e^{2x^2}}{2e^{2x^2} + k} \text{ (solução geral na forma implícita).}$$

Questões

Q 1 Por separação de variáveis, resolva as EDO's de primeira ordem com coeficientes constantes e cheque que sua resposta é solução..

(a) $y' = 2y + 6$ (b) $y' = 1 - y$ (c) $y' = my + n$

Q 2 Determine a solução geral das EDO's lineares de primeira ordem.

(a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$ (c) $y' - \tan(x)y = \sin(x)$ (e) $xy' + y = 3x\cos(2x)$

(b) $x^2y' + xy = 2 + x^2$ (d) $y' - 2y = x^2e^{2x}$ (f) $(1+x^2)^3y' + 4x(1+x^2)^2y = 1$

Q 3 Em cada item, encontre a solução do PVI dado.

(a) $y' - y = 2xe^{2x},\ y(0) = 1$ (c) $xy' + (x+1)y = x,\ y(\ln 2) = 1$

(b) $xy' + 2y = x^2 - x + 1,\ y(1) = 1/2$ (d) $y' + 2x^{-1}y = x^{-2}\cos(x),\ y(\pi) = 1$

Q 4 Determine a solução geral das EDO's de Bernoulli.

(a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = xy^2$ (b) $\dfrac{dy}{dx} - y = y^3$ (c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}$

Respostas

Q 1 (a) $y = ke^{2x} - 3$; (b) $y = ke^{-x} + 1$; (c) $y = ke^{mx} - n/m$.

Q 2 (a) $\mu(x) = e^{3x}$ e $y = ke^{-3x} + e^{-2x} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{9}$; (b) $\mu(x) = x$ e $y = \dfrac{2\ln|x|}{x} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{k}{x}$; (c) $\mu(x) = \ln|\cos(x)|$ e $y = \dfrac{1}{\cos(x)}\left(\dfrac{\sin^2(x)}{2\cos(x)} + k\right)$; (d) $\mu(x) = e^{-2x}$ e $y = \dfrac{x^3e^{2x}}{3} + ke^{2x}$; (e) $\mu(x) = x$ e $y = \dfrac{k}{x} + \dfrac{3\cos(2x)}{4x} + \dfrac{3\sin(2x)}{2}$; (f) $\mu(x) = (1+x^2)^2$ e $y = \dfrac{\arctan(x) + k}{(1+x^2)^2}$.

Q 3 (a) $y = 3e^x + 2(x-1)e^{2x}$; (b) $y = \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1}{12x^2}$; (c) $y = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2e^{-x}}{x}$; (d) $y = x^{-2}(\sin(x) + \pi^2)$.

Q 4 (a) $n = 2$, $\mu(x) = x$ e $y = \dfrac{3x}{k - x^3}$; (b) $n = 3$, $\mu(x) = e^{2x}$ e $y = \pm\left(ke^{-2x} - 1\right)^{-1/2}$; (c) $n = 1/2$, $\mu(x) = \sqrt{x}$ e $\sqrt{y} = \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{k}{\sqrt{x}}$.