Ensinando para Aprender – EPA

Universidade: UNIFACS — Semestre: 2011.2

Professor: Adriano Cattai — Disciplina: Cálculo Diferencial

Grupo: ____

____ Turma: ________

Atividade 03: Regra de L'Hospital; Cálculos Aproximados; Taxas Relacionadas e Esboço Gráfico

Conteúdo: Regra de L'Hospital; Diferenciais; Derivação Implícita; Taxas Relacionadas e Esboço Gráfico de Funções

Objetivos:
◇ Conhecer e compreender a utilização das regras de L'Hospital;
◇ Conceituar, adequadamente, incrementos (ou acréscimos) de uma variável;
◇ Fazer cálculos aproximados com o uso dos diferenciais;
◇ Derivar implicitamente uma função;
◇ Resolver problemas envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas;
◇ Fazer o estudo da variação de uma função para exibir o esboço gráfico dela.

Orientações para desenvolvimento:

1. Desenvolver a atividade em folhas de papel reciclado de tamanho A4, utilizando canetas (coloridas ou não) ou lápis;
2. Não responder na folha de questões e qualquer "parte ilegível" será considerada como errada;
3. A atividade deve ser, obrigatoriamente, escrita por todos os integrantes do grupo;
4. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
5. Todas as figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
6. A atividade será válida apenas quando resolvida e acompanhada do relatório[1] de execução e dos arquivos digitais de registro[2].

Questões:

1. Enuncie a Regra de L'Hospital e determine os limites abaixo.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sec(x) - \text{tg}(x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{x+\sqrt{2+x}}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \text{sen}(x) - 1}{\ln(1+x)}$.

2. Seja $y = f(x)$ uma função. Assim:

(a) defina o *incremento* ou *acréscimo* de x, Δx;

(b) defina o *incremento* ou *acréscimo* de y, Δy, quando existe algum incremento Δx em x;

(c) interprete, geometricamente, a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

(d) defina os *diferenciais* dx e dy;

(e) estabeleça uma fórmula para cálculos aproximados, com o uso da derivada e dos diferenciais;

[1] Modelo disponível em www.cattai.mat.br/epa.

[2] Imagens em vídeo ou em fotografias, preferencialmente fotografias entregue num CD.

(f) com uma aproximação de seis casas decimais, use a fórmula obtida no item anterior, para obter as seguintes aproximações:

(f1) $\sqrt{9,1}$; (f3) $\sqrt[3]{8,1}$; (f5) $\text{sen}(1°)$; (f5) $\cos(1°)$;

(f2) $\sqrt{8,9}$; (f4) $\sqrt[3]{7,9}$; (f6) $\text{sen}(2°)$; (f6) $\text{tg}(59°04'30'')$;

(g) em cada subitem, do item acima, compare o resultado obtido com o resultado obtido a partir de uma calculadora.

3. Seja $y = f(x)$ uma função. Quando a relação entre x e y é dada por uma equação da forma $F(x, y) = 0$, dizemos que y é uma *função implícita* de x. Em muitos casos é possível exibir, explicitamente, $y = f(x)$, a partir de $F(x, y) = 0$. No entanto, nem sempre isso é possível. Assim, o método da derivação implícita permite encontrar a derivada de uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la. Em cada item abaixo, determine $y' = \dfrac{dy}{dx}$, sabendo que $y = f(x)$ está definida implicitamente.

(a) $x^2 - y^2 = 4$; (c) $y^4 + 2xy - 3\ln(x) = 0$; (e) $xe^y - \ln(y+1) = 2$;

(b) $x^3 + 2x^2 = 4xy$; (d) $2y^5 + e^{x^2-1} + \ln(x+y) = 3$; (f) $x^2 + \sqrt{\text{sen}(y)} - y^2 = 1$.

4. Derivando implicitamente, determine as equações da reta tangente e da reta normal à curva dada, no ponto dado. Num mesmo sistema de coordenadas exiba o esboço gráfico da curva e das retas.

(a) $x^2 + y^2 = 9$ e $P(2; \sqrt{5})$; (c) $y^2 = x$ e $P(4, 2)$; (e) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $P(-1; 4\sqrt{2}/3)$;

(b) $x^2 + y^2 = 9$ e $P(2; -\sqrt{5})$; (d) $y^2 = x$ e $P(4; -2)$; (f) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $P(-1; -4\sqrt{2}/3)$.

Observação: (a) círculo; (c) parábola e (e) elipse.

5. Mostre que as retas tangentes às curvas $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ e $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, na origem, são perpendiculares.

6 (Problemas de Taxas Relacionadas)**.**

(a) Um balão está subindo verticalmente acima de uma estrada a uma velocidade constante de $1/3\ m/s$. Quando ele está a $17m$ acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de $5\ m/s$ passa por baixo dele. A que taxa a distância entre a bicicleta e o balão aumentará $3s$ depois?

(b) Uma lâmpada colocada num poste está a $4m$ de altura. Se uma criança de $90cm$ de altura caminha afastando-se do poste à razão de $5\ m/s$, com que rapidez se alonga sua sombra? (Dica: use semelhança entre triângulos)

(c) Um balão de ar quente, subindo na vertical a partir do solo, é rastreado por um telêmetro (dispositivo de precisão destinado à medição de distâncias em tempo real) colocado a $500m$ de distância do ponto de decolagem. No momento em que o ângulo de elevação do telêmetro é $\pi/4$, e se o ângulo aumenta à razão de $0,14\ rad/min$, a que velocidade o balão sobe nesse momento?

(d) Um bote é puxado por uma corda presa à proa e que passa por uma argola no cais a $2m$ acima do nível da proa. A corda é puxada com uma taxa de $0,6\ m/s$. A que velocidade o bote se aproxima do cais quando $3m$ de corda foram puxados?

(e) A medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo está diminuindo a taxa de $\dfrac{\pi}{36} rad/seg$. Se o comprimento da hipotenusa é constante e igual a $40m$, com que velocidade a área está variando, no tempo em que a medida desse ângulo for igual $\dfrac{\pi}{6}$?

(f) Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de 4 pés/s. Um holofote localizado no chão a 20 pés do caminho focaliza o homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a 15 pés do ponto do caminho mais próximo da luz?

(g) Um observador vê um avião afastando-se em vôo horizontal a uma altura constante de $2,4km$ e velocidade de $1600km/h$, sob um ângulo θ. Determine a variação de θ em relação ao tempo no instante em que $\theta = \dfrac{\pi}{3} rad$. Desconsidere a altura do observador.

7. A representação geométrica de uma função justifica-se, pois, por uma observação do gráfico podemos rapidamente fazer uma ideia das características da função representada, nomeadamente: *domínio*, *contradomínio*, *zeros*, *continuidade*, *comportamento assintótico*, *intervalos de crescimento e decrescimento*, *máximos e mínimos*, *pontos de inflexão*, *concavidades*, etc.

O estudo feito sobre assíntotas e aplicação das derivadas são indispensáveis para a construção do gráfico de uma função. No entanto, vamos apresentar uma sequência de passos que podem ser seguidos e que, no seu conjunto, nos permitem elaborar o gráfico de uma função com uma certa segurança.

Roteiro para esboço de gráficos:

1. Determinar o domínio da função;
2. Calcular a interseção do gráfico com o eixo y e, se possível, calcular a interseção do gráfico com o eixo x resolvendo a equação $f(x) = 0$;
3. Fazer o estudo de sinal da função;
4. Verificar se o gráfico possui alguma simétrica: se a função é par o gráfico é simétrico em relação ao eixo y e, se a função é ímpar seu gráfico é simétrico em relação à origem. Também é conveniente analisar se a função é periódica;
5. Calcular as retas assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função. Para as assíntotas verticais, determinar limites infinitos da função; Para as assíntotas horizontais, calcular os limites no infinito da função e verificar se o limite é finito;
6. Calcular f' e determinar todos os pontos críticos de f, ou seja, os pontos em $f'(x) = 0$ ou os pontos em que $f'(x)$ não existe;
7. Através do estudo do sinal de f', determinar os intervalos onde a função é crescente e os intervalos onde ela é decrescente;
8. Determinar os extremos relativos, isto é, os pontos de máximos e os pontos de mínimos;
9. Calcular f'' e determinar o sentido da concavidade de f, isto é, todos os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima ou côncavo para baixo;
10. Determinar Coordenadas de alguns pontos do gráfico, nos quais ajudem a traçar o gráfico de f;
11. Reunir todas essas informações e fazer o esboço do gráfico.

Levando em consideração o roteiro apresentado acima construa o gráfico para cada função abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2}$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+1}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$;

(d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$;

(e) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

(f) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$.

Texto composto em $\LaTeX 2_\varepsilon$, APC, 15 de novembro de 2011