ENSINANDO PARA APRENDER – EPA

UNIVERSIDADE: UNIFACS — SEMESTRE: 2011.2

PROFESSOR: Adriano Cattai — DISCIPLINA: Cálculo Diferencial

GRUPO: ____

____ TURMA: ________

ATIVIDADE 02: REGRAS DE DERIVAÇÃO E PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Conteúdo: Regras de Derivação; Regra da Cadeia; Máximos e Mínimos de Funções

Objetivos:
- ◇ Entender as regras das funções elementares;
- ◇ Utilizar as regras de derivação para obter a derivada de uma função elementar;
- ◇ Derivar Funções Compostas – Regra da Cadeia;
- ◇ Usar a derivada para estudar a monotonicidade de uma função;
- ◇ Usar a derivada para determinar os extremos (máximos e mínimos) de uma função;
- ◇ Usar a derivada para resolver problemas de otimização.

Orientações para desenvolvimento:

1. Desenvolver a atividade em folhas de papel reciclado de tamanho A4, utilizando canetas (coloridas ou não) ou lápis;
2. Não responder na folha de questões e qualquer "parte ilegível" será considerada como errada;
3. A atividade deve ser, obrigatoriamente, escrita por todos os integrantes do grupo;
4. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
5. Todas as figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
6. A atividade será válida apenas quando resolvida e acompanhada do relatório[1] de execução e dos arquivos digitais de registro[2].

Questões:

1. Dada a função $f(x) = x^2 - x - 2$ determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto de abscissa 1. Desenhe, num mesmo sistema de coordenadas, o gráfico de f e as duas retas.

2. Dada a função $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, caso exista, determine a equação da reta tangente a esta curva que seja normal à reta $r : y - 2x = 6$. Desenhe, num mesmo sistema de coordenadas, o gráfico de f e a da reta tangente.

3. Seja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ uma curva. Determine a equação da reta tangente no ponto no ponto da abscissa $x = 1$. Quais os os pontos da curva em que a reta tangente à curva tem inclinação de 60°?

4. Seja $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ uma curva. Se possível, determine, tanto a equação da reta tangente quanto a equação da reta normal a curva no ponto $P(-2; 2/3)$.

5. Uma *função hiperbólica* é uma das seguintes funções: seno hiperbólico, cosseno hiperbólico, tangente hiperbólica, secante hiperbólica, cossecante hiperbólica e cotangente hiperbólica. Essas funções são definidas em termos das funções exponenciais e, portanto, suas derivadas se resumem na derivação de funções exponenciais: $\text{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e as demais a partir destas. Assim, usando a regras de derivação, mostre que:

(a) $[\text{senh}(x)]' = \cosh(x)$; (c) $[\text{tgh}(x)]' = \text{sech}^2(x)$; (e) $[\text{sech}(x)]' = -\,\text{sech}(x)\cdot\text{tgh}(x)$;

(b) $[\cosh(x)]' = \text{senh}(x)$; (d) $[\coth(x)]' = -\,\text{cossech}^2(x)$; (f) $[\text{cossech}(x)]' = -\,\text{cossech}(x)\cdot\coth(x)$.

[1] Modelo disponível em www.cattai.mat.br/epa.

[2] Imagens em vídeo ou em fotografias, preferencialmente fotografias entregue num CD.

6. Enuncie o teorema da Regra da Cadeia. Com ele derive as funções abaixo:

(a) $y = (3x^2 - 1)^{12}$; (c) $y = \sqrt[3]{\text{sen}(x) - 2x}$; (e) $y = \text{sen}^2(x)$; (g) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$;

(b) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x^2+1)^6}$; (d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}$; (f) $y = \sqrt{\text{tg}(x^2+1)}$; (h) $y = \sqrt{\dfrac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}}$.

7. Para cada um dos itens a seguir, determine:

(a) $f'(3)$, sendo $f(5+2x) + f(2x^2+1) = 4x^2 + 4x + 2$;

(b) $f'(0)$, sendo $f\left(\text{sen}(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f(3x - \pi) + 3x - \pi$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$;

(c) $(g \circ f \circ h)'(2)$, em que $f(0) = 1$, $h(2) = 0$, $g'(1) = 5$, $f'(0) = h'(2) = 2$;

(d) a função g, em que $(f \circ g)'(x) = 24x + 34$, $f(x) = 3x^2 + x - 1$ e $g'(x) = 2$.

8. Para cada função abaixo determine os intervalos de crescimento ou decrescimento.

(a) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2}$; (c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; (e) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+1}$; (d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$; (f) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$.

9 (Problemas de otimização)**.**

(a) Prove que se o produto de dois números positivos é constante, a soma é mínima quando os dois números são iguais.

(b) Dado um fio de arame de comprimento L como devemos moldá-lo, em forma de um retângulo, para que tenhamos a maior área possível? Qual a área deste retângulo? (Resp. $L^2/16$)

(c) Uma reta variável passando pelo ponto $P(1,2)$ intersecta o eixo x em $A(a,0)$ e o eixo y em $B(0,b)$. Determine o triângulo OAB, de área mínima, para a e b positivos. (Resp. base 2 e altura 4)

(d) Dentre os retângulos com base no eixo x e vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$, determine o de área máxima. (Resp. base 4 e altura 8)

(e) Um caixa com fundo quadrado e sem tampa deve ser formada com couro. Quais devem ser as dimensões da caixa que requerem a quantidade mínima de couro, sabendo que a sua capacidade é 32 litros? (Lembre-se que $1\ell = 1dm^3$) (Resp. $4 \times 4 \times 2dm^3$)

(f) Um cartaz deve conter $50cm^2$ de matéria impressa com duas margens de $4cm$ em cima e embaixo e duas margens laterais de $2cm$ cada. Determine as dimensões externas do cartaz de modo que a sua área total seja mínima. (Resp. 9×18)

(g) Um tanque de base quadrada, sem tampa, deve conter $125cm^3$. O custo, por metro quadrado, para a base é de $R\$8,00$ e para os lados $R\$4,00$. Encontre as dimensões do tanque para que o custo seja mínimo. (Resp. base $5 \times 5cm^2$ e altura $5cm$)

(h) Desejamos fazer uma caixa retangular aberta com um pedaço de papelão de $8cm$ de largura e $15cm$ de comprimento, cortando um pequeno quadrado em cada canto e dobrando os lados para cima. Determine as dimensões da caixa de volume máximo. (Resp. $5/3, 14/3, 35/3$)

Texto composto em LaTeX 2ε, APC, 5 de outubro de 2011