ENSINANDO PARA APRENDER – EPA

UNIVERSIDADE: UNIFACS SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: Adriano Cattai DISCIPLINA: Cálculo Diferencial

GRUPO: ____

____ TURMA: ________

ATIVIDADE 03: REGRAS DE DERIVAÇÃO, REGRA DA CADEIA E REGRAS DE L'HOSPITAL

Conteúdo: Regras de Derivação, Regra da Cadeia, Derivada da Função Inversa e as Regras de L'Hospital.

Objetivos:

- ◇ Estender as regras de derivação;
- ◇ Derivar funções compostas (A Regra da Cadeia);
- ◇ Derivar implicitamente uma função;
- ◇ Determinar as equações das retas tangente e normal, ao gráfico de uma curva, implicitamente;
- ◇ Conhecer e compreender a utilização das regras de L'Hospital.

Orientações para desenvolvimento:

1. Desenvolver a atividade em folhas de papel **reciclado** A4, utilizando canetas (coloridas ou não) ou lápis;
2. Não responder na folha de questões e qualquer "parte ilegível" será considerada como errada;
3. A atividade deve ser, obrigatoriamente, escrita por todos os integrantes do grupo;
4. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
5. Todas as figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
6. A atividade será válida apenas quando resolvida e acompanhada do relatório de execução e do CD com os arquivos digitais de registro.

Questões:

1. Dadas as funções exponencial $f(x) = a^x$ e logarítmica $g(x) = \log_a(x)$, em que $0 < a \neq 1$, mostre que

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a) \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{x}\log_a(e) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}.$$

2. Uma *função hiperbólica* é uma das seguintes funções: seno hiperbólico, cosseno hiperbólico, tangente hiperbólica, secante hiperbólica, cossecante hiperbólica e cotangente hiperbólica. Essas funções são definidas em termos das funções exponenciais e, portanto, suas derivadas se resumem na derivação de funções exponenciais. Assim, mostre que:

(a) $[\operatorname{senh}(x)]' = \cosh(x)$;

(b) $[\cosh(x)]' = \operatorname{senh}(x)$;

(c) $[\operatorname{tgh}(x)]' = \operatorname{sech}(x)$;

(d) $[\coth(x)]' = -\operatorname{cossech}(x)$;

(e) $[\operatorname{sech}(x)]' = -\operatorname{sech}(x) \cdot \operatorname{tgh}(x)$;

(f) $[\operatorname{cossech}(x)]' = -\operatorname{cossech}(x) \cdot \coth(x)$.

3. Enuncie o teorema da Regra da Cadeia. Com ele derive as funções abaixo:

(a) $y = (3x^2 - 1)^{12}$;

(b) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x^2+1)^6}$;

(c) $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x) - 2x}$;

(d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}$;

(e) $y = \operatorname{sen}^2(x)$;

(f) $y = \sqrt{\operatorname{tg}(x^2+1)}$;

(g) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$;

(h) $y = \ln\left[\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}}\right]$;

(i) $y = \ln\left(\operatorname{tg}(x^2+1)\right)$.

4. Seja $y = f(x)$ uma função. Quando a relação entre x e y é dada por uma equação da forma $F(x,y) = 0$, dizemos que y é uma *função implícita* de x. Em muitos casos é possível exibir, explicitamente, $y = f(x)$, a partir de $F(x,y) = 0$. No entanto, nem sempre isso é possível. Assim, o método da derivação implícita permite encontrar a derivada de uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la. Em cada item abaixo, determine $y' = \dfrac{dy}{dx}$, sabendo que $y = f(x)$ está definida implicitamente.

(a) $x^2 - y^2 = 4$; (c) $y^4 + 2xy - 3\ln(x) = 0$; (e) $xe^y - \ln(y+1) = 2$;

(b) $x^3 + 2x^2 = 4xy$; (d) $2y^5 + e^{x^2-1} + \ln(x+y) = 3$; (f) $x^2 + \sqrt{\text{sen}(y)} - y^2 = 1$.

5. Derivando implicitamente, determine as equações da reta tangente e da reta normal à curva dada, no ponto dado. Num mesmo sistema de coordenadas exiba o esboço gráfico da curva e das retas.

(a) $x^2 + y^2 = 9$ e $P(2; \sqrt{5})$; (c) $y^2 = x$ e $P(4,2)$; (e) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $P(-1; 4\sqrt{2}/3)$;

(b) $x^2 + y^2 = 9$ e $P(2; -\sqrt{5})$; (d) $y^2 = x$ e $P(4; -2)$; (f) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $P(-1; -4\sqrt{2}/3)$.

Observação: (a) círculo; (c) parábola e (e) elipse.

6. Mostre que as retas tangentes às curvas $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ e $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, na origem, são perpendiculares.

7. Para cada um dos itens a seguir, determine:

(a) $f'(3)$, sendo $f(5+2x) + f(2x^2+1) = 4x^2 + 4x + 2$;

(b) $f'(0)$, sendo $f\left(\text{sen}(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f(3x - \pi) + 3x - \pi$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$;

(c) $(g \circ f \circ h)'(2)$, em que $f(0) = 1$, $h(2) = 0$, $g'(1) = 5$, $f'(0) = h'(2) = 2$;

(d) a função g, em que $(f \circ g)'(x) = 24x + 34$, $f(x) = 3x^2 + x - 1$ e $g'(x) = 2$.

8. Enuncie o teorema da função inversa. Use a regra da cadeia para justificar tal teorema.

9. Com o teorema da função inversa, comprove as derivadas das funções trigonométricas inversas.

(a) $[\text{arcsen}(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (c) $[\text{arctg}(x)]' = \dfrac{1}{1+x^2}$; (e) $[\text{arcsec}(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$;

(b) $[\text{arccos}(x)]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (d) $[\text{arccotg}(x)]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$; (f) $[\text{arccossec}(x)]' = -\dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$.

10. Enuncie as Regras de L'Hospital e determine os limites abaixo, com essas regras.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$; (d) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sec(x) - \text{tg}(x)$; (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x}$; (h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{x + \sqrt{2+x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$; (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \text{sen}(x) - 1}{\ln(1+x)}$.

Sugestão Bibliográfica:

1. LEITHOLD, Louis. *o Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 01. Editora Harbra;
2. PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Volume 01. Editora Lopas da Silva;
3. STEWART, James. *Cálculo*. Volume 01. Editora Thomson;
4. THOMAS, George B. *Cálculo*. Volume 01. Editora Pearson;
5. FLEMMING, Diva. *Cálculo A*. Editora Pearson;
6. CANTÃO, Luiza & CANTÃO, Renato. *Funções Hiperbólicas* (botas de aula). Disponível em: http://www.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CDI-I/aula_hiperbolicos.pdf
7. CARVALHO, Sônia. *As funções Hiperbólicas* (notas de aula). Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/comed/2005/b2005/funchiper.pdf
8. Apostila de Cálculo I - UDESC, Joinvile. Disponível na página da nossa disciplina.

Texto composto em LaTeX 2$_\varepsilon$, APC, 15 de maio de 2011