ENSINANDO PARA APRENDER – EPA

UNIVERSIDADE: UNEB SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: Adriano Cattai DISCIPLINA: Cálculo I

GRUPO: ____

____

ATIVIDADE 03: APLICAÇÕES DA DERIVADA

Conteúdo: A Regra de L'Hopita. Taxas de variação e taxas relacionadas. Máximos e mínimos de funções. Esboço Gráfico de funções. Diferenciais e Incrementos.

Objetivos: ◇ Conhecer e compreender a utilização da regra de L'Hopital;

◇ Resolver problemas envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas;

◇ Utilizar os testes de primeira e da segunda derivada para determinar os extremantes (máximos e/ou mínimos) de uma função;

◇ Fazer o estudo da variação de uma função para exibir o esboço gráfico dela;

◇ Conceituar, adequadamente, incrementos (ou acréscimos) de uma variável;

◇ Compreender a distinção entre o incremento Δy e o diferencial dy;

◇ Fazer cálculos aproximados com o uso dos diferenciais.

Orientações para desenvolvimento:

1. Desenvolver a atividade em folhas de papel reciclado A4, utilizando canetas (coloridas ou não) ou lápis;
2. Não responder na folha de questões e qualquer "parte ilegível" será considerada como errada;
3. A atividade deve ser, obrigatoriamente, escrita por todos os integrantes do grupo;
4. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
5. Todas as figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
6. A atividade será válida apenas quando resolvida e acompanhada do relatório[1] de execução e dos arquivos digitais de registro[2].

Questões:

1. Enuncie a Regra de L'Hopital e, com essas regras, determine os limites abaixo.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sec(x) - \text{tg}(x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-3^x}{x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{x+\sqrt{2+x}}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+\text{sen}(x)-1}{\ln(1+x)}$.

2 (Problemas de Taxas Relacionadas)**.**

(a) Um balão está subindo verticalmente acima de uma estrada a uma velocidade constante de $1/3$ m/s. Quando ele está a $17m$ acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de 5 m/s passa por baixo dele. A que taxa a distância entre a bicicleta e o balão aumentará $3s$ depois?

(b) Uma lâmpada colocada num poste está a $4m$ de altura. Se uma criança de $90cm$ de altura caminha afastando-se do poste à razão de 5 m/s, com que rapidez se alonga sua sombra? (Dica: use semelhança entre triângulos)

[1] Ver orientações para a elaboração em www.cattai.mat.br/epa.

[2] Fotografias feitas durante a realização da atividade

(c) Um balão de ar quente, subindo na vertical a partir do solo, é rastreado por um telêmetro (dispositivo de precisão destinado à medição de distâncias em tempo real) colocado a $500m$ de distância do ponto de decolagem. No momento em que o ângulo de elevação do telêmetro é $\pi/4$, e se o ângulo aumenta à razão de $0,14\ rad/min$, a que velocidade o balão sobe nesse momento?

(d) Um bote é puxado por uma corda presa à proa e que passa por uma argola no cais a $2m$ acima do nível da proa. A corda é puxada com uma taxa de $0,6\ m/s$. A que velocidade o bote se aproxima do cais quando $3m$ de corda foram puxados?

(e) A medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo está diminuindo a taxa de $\dfrac{\pi}{36} rad/seg$. Se o comprimento da hipotenusa é constante e igual a $40m$, com que velocidade a área está variando, no tempo em que a medida desse ângulo for igual $\dfrac{\pi}{6}$?

(f) Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de 4 pés/s. Um holofote localizado no chão a 20 pés do caminho focaliza o homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a 15 pés do ponto do caminho mais próximo da luz?

(g) Um observador vê um avião afastando-se em vôo horizontal a uma altura constante de $2,4km$ e velocidade de $1600km/h$, sob um ângulo θ. Determine a variação de θ em relação ao tempo no instante em que $\theta = \dfrac{\pi}{3} rad$. Desconsidere a altura do observador.

3 (Problemas de otimização)**.**

(a) Prove que se o produto de dois números positivos é constante, a soma é mínima quando os dois números são iguais.

(b) Dado um fio de arame de comprimento L como devemos moldá-lo, em forma de um retângulo, para que tenhamos a maior área possível? Qual a área deste retângulo? (Resp. $L^2/16$)

(c) Uma reta variável passando pelo ponto $P(1,2)$ intersecta o eixo x em $A(a,0)$ e o eixo y em $B(0,b)$. Determine o triângulo OAB, de área mínima, para a e b positivos. (Resp. base 2 e altura 4)

(d) Dentre os retângulos com base no eixo x e vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$, determine o de área máxima. (Resp. base 4 e altura 8)

(e) Um caixa com fundo quadrado e sem tampa deve ser formada com couro. Quais devem ser as dimensões da caixa que requerem a quantidade mínima de couro, sabendo que a sua capacidade é 32 litros? (Lembre-se que $1\ell = 1dm^3$) (Resp. $4 \times 4 \times 2dm^3$)

(f) Um cartaz deve conter $50cm^2$ de matéria impressa com duas margens de $4cm$ em cima e embaixo e duas margens laterais de $2cm$ cada. Determine as dimensões externas do cartaz de modo que a sua área total seja mínima. (Resp. 9×18)

(g) Corta-se um pedaço de arame de comprimento L em duas partes; com uma das partes faz-se uma circunferência e com a outra um quadrado. Em que ponto deve-se cortar o arame para que a soma das áreas compreendidas pelas duas figuras seja mínima? (Resp. raio do círculo $\frac{L}{2\pi+8}$ e lado do quadrado $\frac{L}{\pi+4}$)

(h) Um tanque de base quadrada, sem tampa, deve conter $125cm^3$. O custo, por metro quadrado, para a base é de $R\$8,00$ e para os lados $R\$4,00$. Encontre as dimensões do tanque para que o custo seja mínimo. (Resp. base $5 \times 5cm^2$ e altura $5cm$)

(i) Desejamos fazer uma caixa retangular aberta com um pedaço de papelão de $8cm$ de largura e $15cm$ de comprimento, cortando um pequeno quadrado em cada canto e dobrando os lados para cima. Determine as dimensões da caixa de volume máximo. (Resp. $5/3$, $14/3$, $35/3$)

4. Seja $y = f(x)$ uma função. Assim:

(a) defina o *incremento* ou *acréscimo* de x, Δx;

(b) defina o *incremento* ou *acréscimo* de y, Δy, quando existe algum incremento Δx em x;

(c) interprete, geometricamente, a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

(d) defina os *diferenciais* dx e dy;

(e) estabeleça uma fórmula para cálculos aproximados, com o uso da derivada e dos diferenciais;

(f) com uma aproximação de seis casas decimais, use a fórmula obtida no item anterior, para obter as seguintes aproximações:

(f1) $\sqrt{9,1}$;	(f3) $\sqrt[3]{8,1}$;	(f5) $\text{sen}(1^\circ)$;	(f5) $\cos(1^\circ)$;
(f2) $\sqrt{8,9}$;	(f4) $\sqrt[3]{7,9}$;	(f6) $\text{sen}(2^\circ)$;	(f6) $\text{tg}(59^\circ 04' 30'')$;

(g) em cada subitem, do item acima, compare o resultado obtido com o resultado obtido a partir de uma calculadora.

5. A representação geométrica de uma função justifica-se, pois, por uma observação do gráfico podemos rapidamente fazer uma ideia das características da função representada, nomeadamente: *domínio*, *contradomínio*, *zeros*, *continuidade*, *comportamento assintótico*, *intervalos de crescimento e decrescimento*, *máximos e mínimos*, *pontos de inflexão*, *concavidades*, etc.

O estudo feito sobre assíntotas e aplicação das derivadas são indispensáveis para a construção do gráfico de uma função. No entanto, vamos apresentar uma sequência de passos que podem ser seguidos e que, no seu conjunto, nos permitem elaborar o gráfico de uma função com uma certa segurança.

Roteiro para esboço de gráficos:

1. Determinar o domínio da função;
2. Calcular a interseção do gráfico com o eixo y e, se possível, calcular a interseção do gráfico com o eixo x resolvendo a equação $f(x) = 0$;
3. Fazer o estudo de sinal da função;
4. Verificar se o gráfico possui alguma simétrica: se a função é par o gráfico é simétrico em relação ao eixo y e, se a função é ímpar seu gráfico é simétrico em relação à origem. Também é conveniente analisar se a função é periódica;
5. Calcular as retas assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função. Para as assíntotas verticais, determinar limites infinitos da função; Para as assíntotas horizontais, calcular os limites no infinito da função e verificar se o limite é finito;
6. Calcular f' e determinar todos os pontos críticos de f, ou seja, os pontos em $f'(x) = 0$ ou os pontos em que $f'(x)$ não existe;

7. Através do estudo do sinal de f', determinar os intervalos onde a função é crescente e os intervalos onde ela é decrescente;
8. Determinar os extremos relativos, isto é, os pontos de máximos e os pontos de mínimos;
9. Calcular f'' e determinar o sentido da concavidade de f, isto é, todos os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima ou côncavo para baixo;
10. Determinar Coordenadas de alguns pontos do gráfico, nos quais ajudem a traçar o gráfico de f;
11. Reunir todas essas informações e fazer o esboço do gráfico.

Levando em consideração o roteiro apresentado acima construa o gráfico para cada função abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2}$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+1}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$;

(d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$;

(e) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

(f) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$.

Sugestão Bibliográfica:

1. LEITHOLD, Louis. *o Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 01. Editora Harbra;
2. PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Volume 01. Editora Lopas da Silva;
3. STEWART, James. *Cálculo*. Volume 01. Editora Thomson;
4. THOMAS, George B. *Cálculo*. Volume 01. Editora Pearson;
5. FLEMMING, Diva. *Cálculo A*. Editora Pearson;
6. CANTÃO, Luiza & CANTÃO, Renato. *Funções Hiperbólicas* (botas de aula). Disponível em: http://www.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CDI-I/aula_hiperbolicos.pdf
7. CARVALHO, Sônia. *As funções Hiperbólicas* (notas de aula). Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/comed/2005/b2005/funchiper.pdf
8. Apostila de Cálculo I - UDESC, Joinvile. Disponível na página da nossa disciplina.

Texto composto em $\LaTeX 2_\varepsilon$, APC, 30 de agosto de 2011