Ensinando para Aprender – EPA

Universidade: UNEB | Semestre: 2011.1

Professor: Adriano Cattai | Disciplina: Cálculo I

Grupo: ____

____

Atividade 02: Definição de Derivada e Regras de Derivação

Conteúdo: Taxas de variação e derivada no ponto. Regras de Derivação, Regra da Cadeia e Derivada da Função Inversa.

Objetivos: ◇ Definir, adequadamente, taxa de variação média de uma dada função $y = f(x)$, para uma determinada variação na variável x;

◇ Definir, adequadamente, taxa de variação instantânea de uma dada função $y = f(x)$, para um determinado valor na variável x, utilizando processo de limite;

◇ Determinar o coeficiente angular da reta tangente a uma dada curva, num determinado ponto, utilizando o processo de limite;

◇ Determinar as equações das retas tangente e normal, ao gráfico de uma dada função;

◇ Definir as derivadas laterais de uma função num ponto;

◇ Definir a derivada de uma função num ponto;

◇ Estender as regras de derivação;

◇ Derivar funções compostas (A Regra da Cadeia);

◇ Derivar implicitamente uma função;

◇ Determinar as equações das retas tangente e normal, ao gráfico de uma curva, implicitamente;.

Orientações para desenvolvimento:

1. Desenvolver a atividade em folhas de papel reciclado A4, utilizando canetas (coloridas ou não) ou lápis;
2. Não responder na folha de questões e qualquer "parte ilegível" será considerada como errada;
3. A atividade deve ser, obrigatoriamente, escrita por todos os integrantes do grupo;
4. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
5. Todas as figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
6. A atividade será válida apenas quando resolvida e acompanhada do relatório[1] de execução e dos arquivos digitais de registro[2].

Questões:

1. Escreva a definição, para uma função qualquer $y = f(x)$, de taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Exiba alguns exemplos e faça ilustração gráfica.

2. No caso de $f(x) = x$, o que acontece com a taxa de variação média $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores da variável independente x? (Para responder, escolha alguns valores iniciais para a variável x e as respectivas variações Δx, tanto positivas como negativas. Em cada caso, calcule Δy e examine o quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$). A que conclusão você chegou? É possível estabelecer um argumento geométrico que comprove a veracidade de sua conclusão?

3. No caso de $f(x) = 2x + 1$, o que acontece com a taxa de variação média $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores da variável independente x? A que conclusão você chegou, em termos do sinal do coeficiente a? Exiba o esboço gráfico de f.

[1] Ver orientações para a elaboração em www.cattai.mat.br/epa.

[2] Fotografias feitas durante a realização da atividade

4. No caso de $f(x) = -3x+2$, o que acontece com a taxa de variação média $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores da variável independente x? A que conclusão você chegou, em termos do sinal do coeficiente a? Exiba o esboço gráfico de f.

5. Examine o caso da função polinomial de primeiro grau mais geral $y = f(x) = ax+b$. Encontre a taxa de variação média $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ a partir de um ponto x_0 qualquer. Dê uma interpretação para o resultado a que você chegou, levando em conta as três possibilidades para o coeficiente angular a, a saber: $a < 0$, $a > 0$ e $a = 0$.

6. Sabendo que um objeto movimenta-se ao longo de uma linha, de acordo com a equação $s(t) = 3t - 2$, faça uma análise deste movimento, no intervalo de tempo que vai de $3seg$ a $7seg$, determinando:

(a) Δt; (b) Δs;

(c) a velocidade média do objeto quando este se desloca do ponto em que está aos $3seg$ do início do movimento, ao ponto em que está aos $7seg$.

7. Suponha que a posição de uma partícula em movimento sobre uma reta r seja dada por $s(t) = t^2 - 2t$, em que $s(t)$ é medida em metros e t em segundos.

(a) Determine a velocidade média entres os instantes $t = 2$ e $t = 5$;

(b) Determine a velocidade em um instante $t = w$ qualquer;

(c) Determine a velocidade da partícula em t = 0 e t = 4;

(d) Em quais instantes a velocidade é nula?

8. No decorrer de uma experiência, derrama-se um líquido sobre uma superfície plana de vidro. Se o líquido vertido recobre uma região circular e o raio desta região aumenta uniformemente, qual será a taxa de crescimento da área ocupada pelo líquido, em relação à variação do raio, quando o raio for igual a $5cm$? Interprete o resultado obtido.

Atenção: taxa de crescimento da área é a sua taxa de variação; área do círculo, de raio r, é uma função que depende de r, $A(r) = \pi r^2$.

9. O volume $V = V(r)\dfrac{4}{3}\pi r^3$ de um balão esférico muda de acordo com o valor do raio.

(a) Qual a taxa de variação de volume em relação ao raio, quando $r = 2cm$?

(b) Aproximadamente, quanto o volume do balão aumenta quando o raio muda de $2cm$ para $2,2cm$?

10. Próximos à superfície da Terra, todos os corpos caem com a mesma aceleração constante. Os experimentos de Galileu sobre queda livre levaram à equação $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, em que s é a distância e g é a aceleração da gravidade da Terra. Com t em segundos (unidade usual), o valor de g será $9,8m/s^2$. Supondo que uma pedra cai em queda livre partindo do repouso no instante $t = 0s$, determine:

(a) Quantos metros a bola cai nos primeiros 2 segundos?

(b) Qual a velocidade neste instante?

11. Dada uma função $f(x)$, escreva:

(a) A definição da derivada de f, num ponto x_0;

(b) A definição da derivada à direita de f, num ponto x_0;

(c) A definição da derivada à esquerda de f, num ponto x_0.

12. Usando a definição de derivada, verifique se as funções a seguir são deriváveis em x_0.

(a) $f(x) = 2x - 6$, $x_0 = 3$ (c) $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 5$ (e) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

(b) $f(x) = x^3 - 4$, $x_0 = 2$ (d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$ (f) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = \pi/6$

13. Para cada função abaixo, determine as equações das retas tangente e normal no ponto $P(x_0, y_0)$, dado. Após, num mesmo sistema de coordenadas, exiba o esboço gráfico de f e das retas.

(a) $f(x) = x + 1$, $x_0 = 2$ (c) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ (e) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x_0 = \pi/4$

(b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x_0 = 1$ (d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ (f) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x_0 = \pi/2$

14. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$ e que seja perpendicular à reta $2y + x = 3$.

15. Determine as constantes a e b em que: (a) $f(x) = ax^2 + x + 1$, sendo $f'(1) = -9$ e (b) $f(x) = x^2 + ax + b$, sendo $f(1) = -4$ e $f'(2) = 5$.

16. Dadas as funções exponencial $f(x) = a^x$ e logarítmica $g(x) = \log_a(x)$, em que $0 < a \neq 1$, mostre que

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a) \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{x}\log_a(e) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}.$$

17. Uma *função hiperbólica* é uma das seguintes funções: seno hiperbólico, cosseno hiperbólico, tangente hiperbólica, secante hiperbólica, cossecante hiperbólica e cotangente hiperbólica. Essas funções são definidas em termos das funções exponenciais e, portanto, suas derivadas se resumem na derivação de funções exponenciais. Assim, mostre que:

(a) $[\operatorname{senh}(x)]' = \cosh(x)$; (c) $[\operatorname{tgh}(x)]' = \operatorname{sech}^2(x)$; (e) $[\operatorname{sech}(x)]' = -\operatorname{sech}(x) \cdot \operatorname{tgh}(x)$;

(b) $[\cosh(x)]' = \operatorname{senh}(x)$; (d) $[\coth(x)]' = -\operatorname{cossech}^2(x)$; (f) $[\operatorname{cossech}(x)]' = -\operatorname{cossech}(x) \cdot \coth(x)$.

18. Enuncie o teorema da Regra da Cadeia. Com ele derive as funções abaixo:

(a) $y = (3x^2 - 1)^{12}$; (d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}$; (g) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$;

(b) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x^2+1)^6}$; (e) $y = \operatorname{sen}^2(x)$; (h) $y = \ln\left[\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}}\right]$;

(c) $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x) - 2x}$; (f) $y = \sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 1)}$; (i) $y = \ln\left(\operatorname{tg}(x^2 + 1)\right)$.

19. Seja $y = f(x)$ uma função. Quando a relação entre x e y é dada por uma equação da forma $F(x, y) = 0$, dizemos que y é uma *função implícita* de x. Em muitos casos é possível exibir, explicitamente, $y = f(x)$, a partir de $F(x, y) = 0$. No entanto, nem sempre isso é possível. Assim, o método da derivação implícita permite encontrar a derivada de uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la. Em cada item abaixo, determine $y' = \dfrac{dy}{dx}$, sabendo que $y = f(x)$ está definida implicitamente.

(a) $x^2 - y^2 = 4$; (c) $y^4 + 2xy - 3\ln(x) = 0$; (e) $xe^y - \ln(y + 1) = 2$;

(b) $x^3 + 2x^2 = 4xy$; (d) $2y^5 + e^{x^2-1} + \ln(x + y) = 3$; (f) $x^2 + \sqrt{\operatorname{sen}(y)} - y^2 = 1$.

20. Derivando implicitamente, determine as equações da reta tangente e da reta normal à curva dada, no ponto dado. Num mesmo sistema de coordenadas exiba o esboço gráfico da curva e das retas.

(a) $x^2 + y^2 = 9$ e $P(2; \sqrt{5})$; (c) $y^2 = x$ e $P(4, 2)$; (e) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $P(-1; 4\sqrt{2}/3)$;

(b) $x^2 + y^2 = 9$ e $P(2; -\sqrt{5})$; (d) $y^2 = x$ e $P(4; -2)$; (f) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $P(-1; -4\sqrt{2}/3)$.

Observação: (a) círculo; (c) parábola e (e) elipse.

21. Mostre que as retas tangentes às curvas $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ e $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, na origem, são perpendiculares.

22. Para cada um dos itens a seguir, determine:

(a) $f'(3)$, sendo $f(5+2x) + f(2x^2+1) = 4x^2 + 4x + 2$;

(b) $f'(0)$, sendo $f\left(\operatorname{sen}(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f(3x - \pi) + 3x - \pi$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$;

(c) $(g \circ f \circ h)'(2)$, em que $f(0) = 1$, $h(2) = 0$, $g'(1) = 5$, $f'(0) = h'(2) = 2$;

(d) a função g, em que $(f \circ g)'(x) = 24x + 34$, $f(x) = 3x^2 + x - 1$ e $g'(x) = 2$.

23. Enuncie o teorema da função inversa. Use a regra da cadeia para justificar tal teorema.

24. Com o teorema da função inversa, comprove as derivadas das funções trigonométricas inversas.

(a) $[\operatorname{arcsen}(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(b) $[\arccos(x)]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(c) $[\operatorname{arctg}(x)]' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(d) $[\operatorname{arccotg}(x)]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

(e) $[\operatorname{arcsec}(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$;

(f) $[\operatorname{arccossec}(x)]' = -\dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$.

Sugestão Bibliográfica:

1. LEITHOLD, Louis. *o Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 01. Editora Harbra;
2. PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Volume 01. Editora Lopas da Silva;
3. STEWART, James. *Cálculo*. Volume 01. Editora Thomson;
4. THOMAS, George B. *Cálculo*. Volume 01. Editora Pearson;
5. FLEMMING, Diva. *Cálculo A*. Editora Pearson;
6. CANTÃO, Luiza & CANTÃO, Renato. *Funções Hiperbólicas* (botas de aula). Disponível em: http://www.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CDI-I/aula_hiperbolicos.pdf
7. CARVALHO, Sônia. *As funções Hiperbólicas* (notas de aula). Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/comed/2005/b2005/funchiper.pdf
8. Apostila de Cálculo I - UDESC, Joinvile. Disponível na página da nossa disciplina.

Texto composto em LaTeX 2_ε, APC, 9 de agosto de 2011