Ensinando para Aprender – EPA

Universidade: UNEB Semestre: 2011.1

Professor: Adriano Cattai Disciplina: Cálculo I

Grupo: ____

____

Atividade 01: Funções Contínuas e o Teorema do Valor Intermediário

Conteúdo: Funções Contínuas e o Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Objetivos:
- ◇ Definir, adequadamente, função contínua;
- ◇ Construir e analisar gráficos de funções contínuas;
- ◇ Decidir quando, uma dada função, é contínua;
- ◇ Apresentar o Teorema do Valor Intermediário;
- ◇ Utilizar o TVI para garantir a existência de soluções de equações;
- ◇ Usar o método da bissecção e obter uma aproximação para soluções de equações.

Orientações para desenvolvimento:

1. Desenvolver a atividade em folhas de papel reciclado A4, utilizando canetas (coloridas ou não) ou lápis;
2. Não responder na folha de questões e qualquer "parte ilegível" será considerada como errada;
3. A atividade deve ser, obrigatoriamente, escrita por todos os integrantes do grupo;
4. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
5. Todas as figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
6. A atividade será válida apenas quando resolvida e acompanhada do relatório[1] de execução e dos arquivos digitais de registro[2].

Questões:

1. Escreva, ilustrando com gráficos, a definição de:

(a) função contínua num ponto $x = a$;

(b) função contínua à direita num ponto $x = a$;

(c) função contínua à esquerda num ponto $x = a$;

(d) função contínua num conjunto;

(e) função contínua.

Função para a questão 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \in \{1, 2\} \\ 4 - 2x & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

2. Faça o esboço gráfico da função $f : [-1, 0) \cup (0, 3) \to (-1, 2)$, definida acima. A parir do gráfico, responda cada item abaixo.

(a) Existe $f(-1)$? Existe $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$? Existe $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$? f é contínua em $x = -1$? E à direita em $x = -1$?

(b) Existe $f(0)$? Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? f é contínua em $x = 0$?

(c) Existe $f(1)$? Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$? f é contínua em $x = 1$?

(d) Existe $f(2)$? Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? f é contínua em $x = 2$?

(e) Existe $f(3)$? Existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$? f é contínua em $x = 3$?

(f) Qual o valor que deve ser atribuído a $f(1)$ e a $f(2)$ para tornar f contínua nesses pontos? Por que?

(g) Há como atribuir algum valor a $f(0)$ para tornar f contínua em $x = 0$?

[1] Ver orientações para a elaboração em www.cattai.mat.br/epa.

[2] Fotografias feitas durante a realização da atividade

3. Para qual valor de a a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$ é contínua?

4. Defina $f(1)$ para que a função $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ seja contínua.

5. Defina $g(4)$ para que a função $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}$ seja contínua.

6. Defina $h(-4)$ para que a função $h(x) = \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$ seja contínua.

7. Dê um exemplo de uma função $f(x)$ que seja contínua para todos os pontos, exceto em $x = 2$ e que seja possível redefinir $f(2)$ para que f se torne contínua.

8. Dê um exemplo de uma função $g(x)$ que seja contínua para todos os pontos, exceto em $x = 0$ e que não seja possível redefinir $g(0)$ para que g se torne contínua.

9. A partir de $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ podemos afirmar qual a imagem de 2? Qual propriedade f deve possuir para que, a partir de $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$, possamos afirmar o valor de $f(2)$?

10. Para cada item abaixo, decida para quais intervalos cada função é contínua.

(a) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$;

(b) $h(x) = \dfrac{2x}{(x + 1)^2} - \text{sen}(x)$;

(c) $p(x) = 1 - \text{cossec}(x)$;

(d) $q(x) = \sqrt{2x + 4}$;

(e) $s(x) = \dfrac{\ln(x) + x^2 + x}{x^2 - 4}$;

(f) $t(x) = \text{tg}(x)$.

11. Enuncie o teorema do valor intermediário. Com apoio de ilustrações gráficas, explique por que é necessária a hipótese da função ser contínua.

12. Considere equação $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$. Verifique que $x = \pm 2$ é solução desta equação. Utilizando o TVI, mostre que esta equação possui mais duas raízes: uma no intervalo $(-1, 0)$ e a outra no intervalo $(0, 1)$.

13. Mostre, fazendo uso do TVI, que a função $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^2 - x - 3$ possui três raízes: uma no intervalo $(-4, -3)$, outra no intervalo $(-1, 0)$ e a outra no intervalo $(0, 1)$.

14. Mostre que, todo polinômio, definido em $\mathbb{R}$, de grau ímpar possui, pelo menos, uma raiz real?

15. Existe algum arco cujo cosseno seja igual ao próprio arco? Ou seja, existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$? Utilize o TVI para mostrar que sim.

16. Verifique que $x = 2$ e $x = 4$ são raízes da equação $x^2 = 2^x$. Mostre, com o uso do TVI, que existe uma terceira raíz para esta equação.

17. Com o método da bissecção, obtenha uma aproximação (com três casas decimais) para a raíz da equação $\cos(x) = x$, para a terceira raíz da equação $x^2 = 2^x$ e para o zero da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

Sugestão Bibliográfica:

1. STEWART, James. *Cálculo*. Volume 01. Editora Thomson;
2. THOMAS, George B. *Cálculo*. Volume 01. Editora Pearson;
3. FLEMMING, Diva. *Cálculo A*. Editora Pearson.

Respostas:

(3) 4/3; (4) 1/2; (5) 8/5; (6) $-1/16$

Texto composto em $\LaTeX 2_\varepsilon$, APC, 18 de julho de 2011