LISTA DE EXERCÍCIOS
Pré-Cálculo

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

05

Ordem, intervalos e resolução de inequações

[01] Se você ainda não o fez, estude as demonstrações das várias propriedades dos números reais apresentadas nas notas de aula da professor Marlene Dieguez Fernandez para a disciplina Matemática Básica: páginas 37 a 41 do arquivo `fernandez-mb-2009-1.pdf` disponível na página WEB do nosso curso.

[02] Seguindo o modelo apresentado em sala de aula, resolva as inequações abaixo indicando explicitamente qual axioma ou propriedade você usou em cada etapa.

(a) $2 \cdot x - 5 \leq 1$.

(b) $(1 - x) \cdot (5 - 6 \cdot x) < 0$.

(c) $(2 \cdot x - 1)/(x - 2) < 1$.

(d) $x + 1 < x + 2$.

(e) $x + 1 > x + 2$.

(f) $x^2 \leq 16$.

(g) $2 \cdot x \leq x^2$.

(h) $x - 1 > 2/x$.

(i) $0 \leq -x^2 + 4 \cdot x \leq 3$.

[03] Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Apresente uma demonstração caso ela seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $1/a > 1$.

(b) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \geq b - 3$, então $a^3 \geq a^2 \cdot b - 3 \cdot a^2$.

(c) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $2 \cdot a < b^2$, então $2 \cdot a^3 < a^2 \cdot b^2$.

(d) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \cdot b \leq a$, então $b \leq 1$.

[04] Represente em uma reta numérica os conjuntos indicados abaixo (cada conjunto deve ser representado em uma reta numérica diferente).

(a) $[1, 2] \cup [3, 17/2]$.

(b) $(-1, 1) \cup [1, +\infty)$.

(c) $[-2, 3] \cap (3, 6)$.

(d) $[-3, -1) \cap [-2, +\infty)$.

[05] Represente em uma reta numérica os conjuntos indicados abaixo (cada conjunto deve ser representado em uma reta numérica diferente).

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3 \text{ ou } 2 \leq x \leq 5\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7 \text{ ou } -1 \leq x \leq 7\}$.

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 2\}$.

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ e } x \geq -1\}$.

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3\,x + 6 > 0 \text{ ou } 8 - 4\,x < 0\}$.

(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2\,x - 6 < 0 \text{ e } 4\,x + 6 \leq 0\}$.

(g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 > 0 \text{ e } x - 4 \leq 0\}$.

(h) $\{x \in \mathbb{R} \mid 6\,x - 1 = 0 \text{ e } 6\,x - 1 > 0\}$.

[06] Todo intervalo não-degenerado contém uma quantidade infinita de números racionais e irracionais.

(a) Apresente infinitos racionais e infinitos irracionais que pertençam ao intervalo $[1, 2]$.

(b) Apresente infinitos racionais e infinitos irracionais que pertençam ao intervalo $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

[07] O intervalo $(0, 1)$ possui um maior elemento? Isto é, existe um número $p \in (0, 1)$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in (0, 1)$? E o intervalo $(0, 1]$ Ele possui um maior elemento? Justifique sua resposta!

[08] Usando o método esquemático do estudo de sinais, resolva as inequações abaixo.

(a) $\dfrac{2\,x + 1}{3\,x - 1} < 1$.

(b) $\dfrac{3\,x + 1}{x - 1} < 2$.

[09] Sejam $A = [-5, -3] \cup [2, 8]$, $B = (-4, 3)$ e $C = (-8, -1) \cup (1, 5)$. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A \cup C$, $A \cap C$, $A - C$ e $C - A$.

[10] Qual é a negação de "$x > 3$"? E a negação de "$x \geq 3$"? E a negação de "$x \leq 3$"?

[11] Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Apresente uma demonstração caso ela seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(a) Se I e J são intervalos da reta, então $I \cup J$ também é um intervalo da reta.

(b) Se I e J são intervalos da reta, então $I \cap J$ também é um intervalo da reta.

(c) Se I e J são intervalos da reta, então $I - J$ também é um intervalo da reta.

[12] Verdadeiro ou falso? Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 5$ e $x > 1$, então $x \geq 6$. Justifique sua resposta: apresente uma demonstração caso a setença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[13] Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Apresente uma demonstração caso ela seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ e $r < s < t$, então $a + r < b + s < c + t$.

(b) Se $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ e $r < s < t$, então $a - r < b - s < c - t$.

(c) Se $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ e $r < s < t$, então $a - t < b - s < c - r$.

(d) Se $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ e $r < s < t$, então $a \cdot r < b \cdot s < c \cdot t$.

(e) Se $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{R}$, $a, b, c, r, s, t > 0$, $a < b < c$ e $r < s < t$, então $a \cdot r < b \cdot s < c \cdot t$.

(f) Se $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{R}$, $a, b, c, r, s, t > 0$, $a < b < c$ e $r < s < t$, então $a/r < b/s < c/t$.

(g) Se $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{R}$, $a, b, c, r, s, t > 0$, $a < b < c$ e $r < s < t$, então $a/t < b/s < c/r$.

[14] Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Apresente uma demonstração caso ela seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $u, q \in \mathbb{R}$, $1.4587 < u < 1.4588$ e $0.1134 < q < 0.1135$, então $1.5721 < u + q < 1.5723$.

(b) Se $u, q \in \mathbb{R}$, $1.4587 < u < 1.4588$ e $0.1134 < q < 0.1135$, então $1.3452 < u - q < 1.3454$.

(c) Se $u, q \in \mathbb{R}$, $1.4587 < u < 1.4588$ e $0.1134 < q < 0.1135$, então

$$0.16541658 < u \cdot q < 0.16557380.$$

(d) Se $u, q \in \mathbb{R}$, $1.4587 < u < 1.4588$ e $0.1134 < q < 0.1135$, então

$$12.85198237 < u/q < 12.86419754.$$

[15] Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, então

$$m = \frac{a+b}{2}$$

é tal que $a \leq m \leq b$.

[16] **(Vizinhanças)** Uma vizinhança de um número real x é um intervalo aberto $I = (a, b)$ tal que $x \in I = (a, b)$ (e, portanto, $a < x < b$).

(a) Determine uma vizinhança do número $x = 1$. Quantas vizinhanças o número $x = 1$ possui? O número $x = 1$ possui uma vizinhança I cujo comprimento é menor do que ou igual a 0.00000000001?

(b) Considere o conjunto $A = [0, 2]$. Note que o número $x = 1$ pertence ao conjunto A. Existe uma vizinhança I de $x = 1$ que esteja contida em A? Existe uma vizinhança I de $x = 1$ que não esteja contida em A?

(c) Considere o conjunto $A = [0, 2]$. Note que o número $x = 1.99999999$ pertence ao conjunto A. Existe uma vizinhança I de $x = 1.99999999$ que esteja contida em A?

(d) Considere o conjunto $A = [0, 2]$. Note que o número $x = 2$ pertence ao conjunto A. Existe uma vizinhança I de $x = 2$ que esteja contida em A? Existe uma vizinhança I de $x = 2$ que não esteja contida em A?

(e) Considere o conjunto $B = (0, 2)$. Note que o número $x = 2$ não pertence ao conjunto B. Existe uma vizinhança I de $x = 2$ que esteja contida em B? Existe uma vizinhança I de $x = 2$ que não esteja contida em B?

[17] Sejam a, b, c e d números reais positivos tais que $a/b < c/d$. O número $(a + c)/(b + d)$ é denominado *mediante* de a/b e c/d. Mostre que

$$a, b, c, d > 0 \text{ e } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

isto é, o mediante de a/b e c/d sempre está entre a/b e c/d.