Análise Real

(MA0062)

Adriano Pedreira Cattai
http://cattai.mat.br

Universidade do Estado da Bahia — UNEB

Semestre 2009.2

Sumário

ANÁLISE REAL

Adriano Pedreira Cattai

http://cattai.mat.br

Apresentação

Análise é o ramo da matemática que lida com os conceitos introduzidos pelo cálculo diferencial e integral, tendo surgido justamente da necessidade de prover formulações rigorosas às idéias intuitivas do cálculo. Sendo hoje uma disciplina muito mais ampla, tais tópicos são tratados em uma subdivisão chamada análise real.

Se a Análise surgiu do estudo dos números e funções reais, sua abrangência cresceu de forma a estudar os números complexos, bem como espaços mais gerais, tais como os espaços métricos, espaços normados e os espaços lineares topológicos.

Embora seja difícil definir exatamente o que seja análise matemática e delinear precisamente seu objeto de estudo, pode-se dizer grosseiramente que a análise se dedica ao estudo das propriedades topológicas em estruturas algébricas.

Fonte: Wikipédia (http://pt.wikipedia.org/wiki/Análise_matemática)

Este material deverá servir como referência aos estudos introdutórios de Análise Real na disciplina *Análise Real* (MA0062), do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB/Campus II. Deve-se recorrer à literatura (indicamos alguns autores na bibliografia) possibilitando uma maior formação e compreensão dos tópicos aqui abordados, que são: *Axiomática e Noções Topológicas em* $\mathbb{R}$, *Seqüências e Séries*; *Limite, Continuidade e Derivada*.

Prof. *Adriano Pedreira Cattai.*

Teorema e Demonstrações

Axiomas e Proposições

Fonte: Wikipédia

Proposição é uma sentença declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa. Geralmente, de simples prova e de importância Matemática menor.

Um axioma é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução e inferências de outras verdades (dependentes de teoria).

Na matemática, um axioma é uma hipótese inicial de qual outros enunciados são logicamente derivados. Pode ser uma sentença, uma proposição, um enunciado ou uma regra que permite a construção de um sistema formal. Diferentemente de teoremas, axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução e nem são demonstráveis por derivações formais, simplesmente porque eles são hipóteses iniciais. Isto é, não há mais nada a partir do que eles seguem logicamente (em caso contrário eles seriam chamados teoremas). Em muitos contextos, “axioma”, “postulado” e “hipótese” são usados como sinônimos.

A palavra “axioma“ vem do grego, que significa “considerado válido ou adequado” ou “considerado autoevidente".

Um Teorema é uma proposição glorificada. Ou seja, é um resultado importante que se destaca. Usualmente deixa-se o termo "teorema" para as afirmações que podem ser provadas de grande "importância matemática".

São dados outros nomes para os outros tipos dessas afirmações (proposições):

Lema: é um "pré-teorema". Um teorema que serve para ajudar na prova de outro teorema maior. A distinção entre teoremas e lemas é um tanto quanto arbitrária, uma vez que grandes resultados são usados para provar outros. Por exemplo, o Lema de Gauss e o Lema de Zorn são muito interessantes, e muitos autores os denominam de Lemas, mesmo que não os usem para provar alguma outra coisa.

Corolário: é uma consequência direta de outro teorema ou de uma definição, muitas vezes tendo suas demonstrações omitidas, por serem simples;

Escólio: é uma consequência direta da demonstração (ou parte da demonstração) de um teorema.

Provar teoremas é a principal atividade dos matemáticos.

Teoremas

A generalidade dos resultados matemáticos assumem a seguinte forma: *admitindo a validade de uma ou mais* ***premissas*** *, decorre(m) obrigatoriamente uma ou mais conclusões, ou* ***consequências***. Um tal enunciado de resultados tem o nome de **Teorema**. A validade de um teorema tem de ser provada, ou demonstrada. A sucessão finita de argumentos lógicos mostrando que determinada afirmação é necessáriamente verdadeira quando se assumem certas premissas, damos o nome de **prova** ou **demonstração**.

Num teorema, ao conjunto de premissas dá-se o nome de **hipótese**, e ao conjunto de conclusões dá-se o nome de **tese**. Esquematicamente, podemos representar um teorema da seguinte forma:

Teorema: *Hipótese* $\Longrightarrow$ *Tese.*

Observação: Quando num teorema é válido também a recíproca, isto é, "se P, então Q" e "se Q, então P", escrevemos $P \Leftrightarrow Q$, ao invés de escrever $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$. O correspondente símbolo lógico é $\Leftrightarrow$ é o "se e somente se". A forma de expressão para um teorema "se P então Q, e se Q então P" é "P se e somente se Q".
Por exemplo, para o teorema "se um inteiro x é par, então $x+1$ é ímpar, e se $x+1$ é ímpar, então x é par", escrevemos "um inteiro x é par se, e somente se, $x+1$ é ímpar". Em símbolos: x é par $\Leftrightarrow$ $x+1$ é ímpar.
Outras maneiras de usar o símbolo $\Leftrightarrow$ são:

(i) P sse Q (abreviada);

(ii) P é necessário e suficiente para Q.

Ao final de uma demonstração matemática, é usual aperecer Q.E.D (ou QED) que é uma abreviatura para Quod erat demonstrandum, uma expressão em Latim que significa "como se queria demonstrar". Na versão portuguesa C.Q.D. (ou CQD). Frequentemente é substituido por um dos símbolos $\blacksquare$ ou $\square$.

Técnicas de Demonstração

A demonstração da validade de um teorema pode ser feita de várias maneiras, das quais salientamos as seguintes, por serem as mais frequentes. A fim de simplificar a notação, admitimos no que se segue que a hipótese é constituída por uma única expressão proposicional $P(x)$ e que a tese é igualmente constituída por uma única condição $Q(x)$. Assim, o teorema assume a seguinte forma:

$$\boxed{\textbf{Teorema: } P(x) \implies Q(x).}$$

Prova Direta

A conclusão é estabelecida através da combinação lógica dos axiomas, definições e teoremas já existentes. Constrói-se uma cadeia de condições intermediárias ($R_1, R_2, \ldots, R_n$) que decorrem umas das outras, de tal forma que a transitividade da implicação lógica nos permite chegar à validade de Q, admitindo a validade de P:

$$\boxed{P(x) \Rightarrow R_1(x) \Rightarrow R_2(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_n(x) \Rightarrow Q(x).}$$

Vejamos um exemplo.

Teorema A. A soma de dois números pares é um número par.

Prova: Seja a e b dos números pares. Assim, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, podemos escrever $a = 2m$ e $b = 2n$. Deste modo temos:

$$a + b = 2m + 2n \Rightarrow a + b = 2(m + n) \Rightarrow a + b = 2p,\ p = m + n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \text{ é par.}$$

□

Este teorema pode ser assim reescrito:

$$\text{Se } \underbrace{a, b \in \mathbb{R} \text{ são pares}}_{P(x)}, \text{ então } \underbrace{a + b \text{ é par}}_{Q(x)}.$$

Prova Contra-Recíproco

Da lógica, temos que a implicação $P \Rightarrow Q$ é logicamente equivalente ao seu contra-recíproco, isto é, à afirmação $\sim Q \Rightarrow \sim P$. Assim, uma forma possível de demonstrar uma implicação consiste em demonstrar o seu contra-recíproco. Vamos a um exemplo.

Teorema B. Para números naturais, se $\underbrace{p^2 \text{ é par}}_{P(x)}$, então $\underbrace{p \text{ é par}}_{Q(x)}$.

Prova: Devemos ter que, para números naturais, "se $\underbrace{p \text{ é ímpar}}_{\sim Q(x)}$, então $\underbrace{p^2 \text{ é ímpar}}_{\sim P(x)}$". De fato,

$$\begin{aligned} p \text{ é ímpar} &\Rightarrow p = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow p^2 = 2q + 1,\ q = 2n^2 + 2n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow p^2 \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

□

Prova por Contradição (ou redução ao absurdo)

Consiste em provar que admitir P em conjunto com $\sim Q$ gera uma contradição, ou impossibilidade, designada de absurdo. Vejamos como isso ocorre na prática.

Teorema C. dado um número real a. Se $\underbrace{a > 0}_{P(x)}$, então $\underbrace{\frac{1}{a} > 0}_{Q(x)}$.

Prova: A negação da consequência $\frac{1}{a} > 0$ é $\frac{1}{a} < 0$ (ignoramos a igualdade a zero, por não ser possível para qualquer $a \in \mathbb{R}$). Mostraremos que não é possível verificar-se esta condição em simultâneo com a premissa $a > 0$. Ora,

$$\begin{array}{l} a > 0 \\ \frac{1}{a} < 0 \end{array} \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow 1 < 0,$$

o que é, certamente, uma afirmação falsa. Aqui está o absurdo e, portanto, $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$. □

Prova por Indução

Um caso "base" é provado e uma regra de indução é usada para provar uma série de outros casos. Precisamente:

Seja $P(n)$ uma condição com uma variável $n \in \mathbb{N}$, tal que:

1. **condição inicial:** o número $n = 1$ verifica a condição $P(n)$; e
2. **hipótese de indução:** sempre que o número natural n verifica a condição $P(n)$, então o número $n + 1$ também a verifica:
$$P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Então, a condição $P(n)$ verifica-se para todo o número natural, $n \in \mathbb{N}$.

Na seção "O Princípio da Indução Completa", página 16, veremos maiores detalhes e exemplos.

Prova por Construção

Consiste em construir um exemplo concreto com determinada propriedade para mostrar que existe algo com tal propriedade.

Prova por Exaustão

A conclusão é estabelecida dividindo o problema em um número finito de casos e provando cada um separadamente.

Capítulo 1

Números Naturais e Números Inteiros

Deus fez os números naturais.
O resto é obra dos homens.
Leopold Kronecker

1.1 Números Naturais

O conjunto usado para contagens é o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. De tão natural, $\mathbb{N}$ ganha o nome ($\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais) e é o primeiro conjunto numérico que aparece na história de qualquer civilização ou em qualquer tratado sobre os fundamentos da Matemática. Os números naturais formam um dos conceitos mais antigos conhecidos pelo ser humano. Entretanto, a sua evolução de uma noção intuitiva para um conceito mais elaborado foi muito lenta. Só no final do século XIX, quando os fundamentos de toda a Matemática foram questionados e intensamente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais primitivos.

Não discutiremos a evolução do conceito de número natural nem tentaremos explicar sua natureza, mas apenas estudar algumas das suas propriedades de forma axiomática, isto é, a partir de uma lista razoavelmente pequena de propriedades básicas e das duas operações (soma e multiplicação) iremos obter as demais propriedades.

Existe uma axiomática, idealizada no final do século XIX pelo matemático italiano Giuseppe Peano, que, com quatro axiomas, consegue não só definir a adição e a multiplicação nos naturais, como também deduzir as demais propriedades.

1.1.1 Fundamentação Axiomática

Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais: a *adição* $(+)$ e a *multiplicação* $(\cdot)$, e uma relação de ordem menor do que $(<)$. A operações são assim definidas:

◇ *Adição*. Associa os números $m, n \in \mathbb{N}$ à soma $m + n$.

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (m, n) & \mapsto & m + n \end{array}$$

◇ *Multiplicação*. Associa os números $m, n \in \mathbb{N}$ ao produto $m \cdot n$.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (m, n) & \mapsto & m \cdot n \end{array}$$

Os axiomas que passaremos a detalhar descreverão algumas das propriedades básicas das operações e da relação “ menor do que”, que tomaremos como base para desenvolver a teoria. Qualquer outra propriedade, mesmo que intuitivamente óbvia, poderá ser demonstrada a partir dessas.

Observamos que, em qualquer apresentação axiomática, o começo tende a ser cansativo, precisamente por ser necessário demonstrar alguns fatos que são bem conhecidos. Tentamos tornar mais fluente a exposição admitindo algumas propriedades do que estritamente necessárias.

O grupo de axiomas abaixo descreverá algumas propriedades da soma e da multiplicação que, certamente, são familiares ao leitor.

($N1$) A adição e a multiplicação são bem definidas:

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N}, a = a' \wedge b = b' \quad \Rightarrow \quad a + b = a' + b' \wedge a \cdot b = a' \cdot b'$$

($N2$) A adição e a multiplicação são comutativas:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \;\; a + b = b + a \wedge a \cdot b = b \cdot a$$

($N3$) A adição e a multiplicação são associativas:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \;\; (a + b) + c = a + (b + c) \wedge (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

($N4$) A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \;\; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Fique atento! A propriedade $N1$ é que permite somar, a ambos os lados de uma igualdade, um dado número ou multiplicar ambos os membros por um mesmo número.

Além destas propriedades, o conjunto $\mathbb{N}$ possui:

($N5$) Integridade: dados $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}$.

($N6$) Lei da Tricotomia: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada: (i) $a = b$; (ii) $\exists c \in \mathbb{N};\ b = a + c$; (iii) $\exists c \in \mathbb{N};\ a = b + c$;

1.1 Definição (Relação menor do que)**.** Dados $a, b \in \mathbb{N}$, dizemos que a é *menor do que* b, simbolizado por $a < b$, toda vez que a propriedade (ii) acima é verificada. Analogamente, a propriedade (iii) sendo verificada, diremos que b é menor do que a, e escrevemos $b < a$.

Nota 1.

- ◇ Com a definição acima, a lei da tricotomia nos diz que, dados $a, b \in \mathbb{N}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:

  (i) $a = b$; (ii) $a < b$; (iii) $b < a$;

- ◇ Utilizamos a notação $b > a$, que se lê b é *maior do que* a, para representar $a < b$.

- ◇ Decorre, das definições, que $0 < a$ para todo $a \in \mathbb{N}$. De fato, para todo $a \in \mathbb{N}$, temos

$$0 + a = a \quad \Rightarrow \quad 0 < a.$$

1.2 Proposição.

(i) A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \; a = b \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + c.$$

(ii) A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ a = b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c = b \cdot c.$$

Prova:

(i) A implicação $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ é consequência do fato da adição ser bem definida (propriedade (N1)). Supondo agora que $a + c = b + c$. Pela tricotomia, temos três possibilidades:

1. $a < b$. Isto levaria a $a + c < b + c$, absurdo!
2. $b < a$. Pelo mesmo argumento acima, teríamos $b + c < a + c$, também absurdo!
3. $a = b$. Esta é a única possibilidade que resta.

(ii) A implicação $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$ decorre do fato da multiplicação ser bem definida. Suponha agora que $a \cdot c = b \cdot c$. Assim, pela tricotomia, temos três possibilidades:

1. $a < b$. Isto levaria a $a \cdot c < b \cdot c$, absurdo!
2. $b < a$. Pelo mesmo argumento acima, teríamos $b \cdot c < a \cdot c$, também absurdo!
3. $a = b$. Esta é a única possibilidade que resta.

1.3 Proposição.

(i) A relação menor do que é transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ a < b \wedge b < c \quad \Rightarrow \quad a < c.$$

(ii) A adição é compatível e cancelativa com respeito à relação " menor do que":

$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c.$$

(iii) A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à relação " menor do que":

$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ a < b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c.$$

Prova:

(i) Supondo $a < b$ e $b < c$, temos que existem $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ tais que $b = a + d_1$ e $c = b + d_2$. Logo, usando a associatividade da adição, temos que:

$$c = b + d_2 = (a + d_1) + d_2 = a + (d_1 + d_2),$$

em que $d_1 + d_2 \in \mathbb{N}$, o que implica $a < c$.

(ii) Supondo que $a < b$, existe $d \in \mathbb{N}$, tal que $b = a + d$. Somando c a ambos os lados desta igualdade, pela comutatividade e associatividade da adição, temos

$$b + c = c + b = c + (a + d) = (c + a) + d = (a + c) + d,$$

o que mostra que $a + c < b + c$. Reciprocamente, supondo $a + c < b + c$, pela tricotomia, temos três possibilidades:

1. $a = b$. Isto levaria a $a + c = b + c$, absurdo!

2. $b < a$. Pela primeira parte da demonstração, teríamos $b + c < a + c$, também absurdo!

3. $a < b$. Esta é a única possibilidade que resta.

(iii) Supondo $a < b$, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + d$. Multiplicando ambos os lados desta igualdade por c, pelas propriedades comutativa e distributiva da multiplicação, tem-se

$$b \cdot c = c \cdot b = c \cdot (a + d) = c \cdot a + c \cdot d = a \cdot c + c \cdot d,$$

o que mostra que $a \cdot c < b \cdot c$, pois, pela integridade $c \cot g\, d \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, supondo que $a \cdot c < b \cdot c$, pela tricotomia, temos três possibilidades:

1. $a = b$. Isto levaria a $a \cdot c = b \cdot c$, absurdo!

2. $b < a$. Pela primeira parte da demonstração, teríamos $b \cdot c < a \cdot c$, também absurdo!

3. $a < b$. Esta é a única possibilidade que resta.

Subtração em $\mathbb{N}$

Dados dois números naturais a e b, com $a < b$, sabemos que existe um número natural c tal que $b = a + c$. Neste caso, definimos o número b menos a, denotado por $b - a$, como sendo o número c. Em símbolos, temos:

$$c = b - a \Leftrightarrow b = a + c.$$

Dizemos que c é o resultado da subtração de a de b. Assim

$$\begin{array}{rccl} - : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (b, a) & \mapsto & c := b - a \Leftrightarrow b = a + c \end{array}$$

Muito cuidado! No universo dos números naturais nem sempre existe a subtração de dois números; só existe $b - a$ quando $a < b$, e que por definição $(b - a) + a = b$.

Nota 2. A subtração não é uma operação associativa, de fato:

$$(9 - 4) - 3 = 5 - 3 = 2 \quad \text{e} \quad 9 - (4 - 3) = 9 - 1 = 8$$

1.4 Proposição. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se $a < b$, então $c \cdot (b - a) = c \cdot b - c \cdot a$.

Prova: Note que, se $b > a$, então $c \cdot b > c \cdot a$, e assim $c \cdot b - c \cdot a$ está bem definido. Supondo, então, $b - a = d$, temos $b = a + d$. Multiplicando por c ambos os membros desta última igualdade, obtemos $c \cdot b = c \cdot (a + d) = c \cdot a + c \cdot d$, o que nos dá

$$c \cdot d = c \cdot b - c \cdot a.$$

Substituindo d por $b - a$ na igualdade acima, obtemos $c \cdot (b - a) = c \cdot b - c \cdot a$. Como queríamos.

1.1.2 Exercícios Propostos

EP **1.1.** Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tais que $a < b$ e $c < d$. Mostre que $b - a < d - c \Leftrightarrow b + c < a + d$.

EP **1.2.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $a - (b - c)$ esteja bem definido. Mostre que $(a + c) - b$ está bem definido e que $a - (b - c) = (a + c) - b$.

EP **1.3.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $a < c$ e $b < c$. Mostre que, se $c - a < c - b$, então $a > b$.

EP **1.4.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $b + c < a$. Mostre que $a - (b + c)$ e $(a - b) - c$ estão bem definidos e que vale a igualdade $a - (b + c) = (a - b) - c$.

EP **1.5.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $c < b < a$. Mostre que $b - c < a - c < a$.

1.2 Números Inteiros

A noção de número natural, como vimos, desenvolveu-se gradativamente a partir da experiência cotidiana. Seu emprego foi-se generalizando aos poucos e as propriedades das operações foram admitidas como um fato experimental. O mesmo não aconteceu com os números negativos. O primeiro uso conhecido desses números encontra-se numa obra indiana, atribuída a Brahmagupta (628$d.C.$ aproximadamente), na qual são interpretados como dívidas. Foi preciso a possibilidade de dar diversas interpretações aos números negativos que fez com que eles fossem aceitos aos poucos na coletividade matemática. Porém, desde seu aparecimento, esses números sucitaram dúvidas quanto à sua legitimidade. Em 1543 Stieffel ainda os chamava de números absurdos, e Cardano, contemporâneo de Stieffel, denominava-os soluções falsas de uma equação.

A noção de número natural (a partir da qual se pode explicitar a noção dos inteiros) foi fundamentada com precisão, pela primeira vez, pelo matemático italiano Giuseppe Peano, em 1889 na sua *Arithmetica Principia Nova Methodo Exposita*. O Método de Peano, com leves variantes, é usado até hoje por numerosos textos, mas tem o inconveniente de ser longo e demorado. Segundo esta teoria, a definição de número natural é estabelecida a partir de três conceitos primitivos e cinco axiomas. O leitor interessado nesse ponto de vista poderá consultar o último capítulo do livro *Números uma introdução à Matemática*, de César P. Milies e Sônia P Coelho, editora EDUSP.

Preferimos dar diretamente uma fundamentação axiomática dos números inteiros semelhante a que empregamos no capítulo anterior, dos Números Naturais, permitindo chegar mais rapidamente a resultados significativos. Mas, afinal, o que são os números inteiros?

1.2.1 Fundamentação Axiomática

Os números inteiros formam um conjunto, que denotaremos por $\mathbb{Z}$, assim definido:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\},$$

no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação, que definimos para os números Naturais.

Enunciamos um grupo de 6 axiomas (propriedades) em $\mathbb{N}$ que também são válidas para $\mathbb{Z}$, além das que seguem:

(Z1) A existência do Elemento Neutro:

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ a + 0 = a \quad \text{e} \quad a \cdot 1 = a.$$

(Z2) A existência do Oposto: para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe um único oposto aditivo, denotado por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

(Z3) Propriedade cancelativa para a multiplicação: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, tem-se que

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c.$$

Nota 3. No conjunto $\mathbb{Z}$, distinguimos três subconjuntos notáveis:

- $\diamond$ $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (conjunto dos inteiros não negativos)
- $\diamond$ $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ (conjunto dos inteiros não positivos)
- $\diamond$ $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$ (conjunto dos inteiros não nulos)

1.5 Proposição (Propriedade Cancelativa da Adição)**.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que, se $a + b = a + c$, então $b = c$.

Prova: Se $a + b = a + c$, somando o oposto de a a ambos os membros dessa igualdade, temos que

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c).$$

Da propriedade associativa, temos

$$[(-a) + a] + b = [(-a) + a] + c,$$

isto é, $0 + b = 0 + c$, donde $b = c$, como queríamos.

1.6 Proposição. Para todo inteiro a, tem-se que $a \cdot 0 = 0$.

Prova: Como $0 = 0 + 0$, escrevemos $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Uma vez que $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$, temos

$$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0,$$

e pela propriedade cancelativa da adição, temos que $a \cdot 0 = 0$.

1.7 Proposição. Sejam a e b inteiros, tais que $a \cdot b = 0$. Então, $a = 0$ ou $b = 0$.

Prova: Se $a \cdot b = 0$, usando a proposição anterior podemos escrever essa igualdade na forma $a \cdot b = a \cdot 0$. Se $a = 0$, a proposição está demonstrada, caso contrário, podemos usar o axioma (Z3) para cancelar e obtemos $b = 0$.

1.8 Proposição (Regra dos Sinais)**.** Sejam a e b inteiros. Então:

(i) $-(-a) = a$;

(ii) $(-a) \cdot (b) = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$;

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

Prova:

(i) Note que o oposto de um elemento a é o único inteiro que verifica a equação $a + x = 0$. Deste modo, a verifica a equação $(-a) + x = 0$, implicando que a é o oposto de $-a$, que é indicado por $-(-a)$.

(ii) Para a primeira igualdade, perceba que $(-a) \cdot b$ é a solução da equação $a \cdot b + x = 0$, já que

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = [(-a) + a] \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Analogamente, verifica-se que $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$.

(iii) Observe, diretamente, que aplicando (ii) temos

$$(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)),$$

e por (i), segue que $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Em $\mathbb{N}$ definimos a relação menor do que ($<$) e que observamos não ser uma "relação de ordem". Em $\mathbb{Z}$, está definida a relação "menor do que ou igual" ($\leq$), que é uma relação de ordem (verifique isso!) e que também permite comparar seus elementos, da seguinte forma:

1.9 Definição (Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$). Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a é *menor do que ou igual a* b, simbolizado por $a \leq b$, se existe um inteiro não negativo c tal que $b = a + c$. Utilizamos a notação $b \geq a$, que se lê b é *maior do que ou igual a* a, para representar $a \leq b$.

Com esta definição, a Proposição 1.3 pode ser reescrita como:

1.10 Proposição.

(i) A relação menor do que ou igual é reflexiva:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \text{ tem-se que } a \leq a.$$

(ii) A relação menor do que ou igual é anti-simétrica:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a \leq b \wedge b \leq a \ \Rightarrow \ a = b.$$

(iii) A relação menor do que ou igual é transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z},\ a \leq b \wedge b \leq c \ \Rightarrow \ a \leq c.$$

(iv) A adição é compatível e cancelativa com respeito à relação " menor do que ou igual ":

$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ a \leq b \ \Leftrightarrow \ a + c \leq b + c.$$

(v) A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à relação " menor do que ou igual ":

$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ a \leq b,\ c \geq 0 \ \Leftrightarrow \ a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Prova: Pura Diversão!

Subtração em $\mathbb{Z}$

Dados dois números inteiros a e b, com $a \leq b$, sabemos que existe um número inteiro não negativo c tal que $b = a + c$. Neste caso, definimos o número b menos a, denotado por $b - a$, como sendo o número c. Em símbolos, temos:

$$c = b - a \Leftrightarrow b = a + c.$$

Dizemos que c é o resultado da subtração de a de b. Assim

$$\begin{array}{rccl} - : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & (b,a) & \mapsto & c := b-a \Leftrightarrow b = a + c \end{array}$$

De outro modo, pela existência do simétrico aditivo, podemos definir em $\mathbb{Z}$ a subtração, estabelecendo que $a - b := a + (-b)$, para todos a e b pertencentes a $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{rccl} - : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & (a,b) & \mapsto & a-b := a+(-b) \end{array}$$

Fique Atento! Vimos que no universo dos números naturais, nem sempre existe a subtração de dois números, só existe $b - a$ quando $a < b$. Em $\mathbb{Z}$ não existe esta preocupação.

1.2.2 Princípio da Boa Ordem

Para apresentar nosso último axioma, introduziremos alguns conceitos.

1.11 Definição. Seja X um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Diz-se que X é limitado inferiormente se existe algum inteiro m tal que, para todo $a \in X$, tem-se que $m \leq a$.

Um elemento $m_0 \in X$ diz-se elemento mínimo de X se, para todo $a \in X$, tem-se que $m_0 \leq a$ (verifique, se existe um elemento mínimo de X ele é único!).

De modo análogo, define-se conjunto limitador superiormente e elemento máximo. Usaremos a notação $\min(X)$ e $\max(X)$ para indicar o mínimo e o máximo de um conjunto X, quando existirem.

Axioma 1 (Princípio da Boa Ordem). Todo conjunto não vazio de inteiros não-negativos contém um elemento mínimo.

Até aqui sabemos, obviamente, que $0 < 1$, no entanto não tínhamos provado que não existem inteiros entre 0 e 1. Esse é o conteúdo do nosso próximo corolário.

1.12 Corolário. Seja a um inteiro tal que $0 \leq a \leq 1$. Então, $a = 0$ ou $a = 1$.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que exista um inteiro a diferente de 0 e de 1 nessas condições. Assim, o conjunto $S = \{a \in \mathbb{Z}; 0 < a < 1\}$ seria não-vazio e pelo Princípio da Boa Ordem existiria $m = \min(S)$. Como $m \in S$ temos $m > 0$ e $m < 1$. Multiplicando por m a segunda desigualdade, obtemos $m^2 < m$. Assim, também $m^2 > 0$ e, como $m < 1$, da transitividade temos $m^2 < 1$. Logo $m^2 \in S$ e é menor que seu elemento mínimo, uma contradição.

1.13 Corolário. Dado um número inteiro n qualquer, não existe nenhum número inteiro m tal que $n < m < n + 1$.

Prova: Suponha, por absurdo, que exista um número inteiro m com $n < m < n + 1$. Logo, existiria um número inteiro positivo k tal que $n + k = m < n + 1$, que, pela propriedade cancelativa da adição, implicaria $0 < k < 1$, o que é um absurdo, tendo em vista o corolário acima.

1.14 Corolário. Sejam a e b dois inteiros não negativos. Se $ab = 1$, então $a = 1$ e $b = 1$.

Prova: Inicialmente, note que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois caso contrário $ab = 0$. Agora, se $a \neq 1$ e $b \neq 1$, então devemos ter $a > 1$ e $b > 1$. Logo, $ab > b > 1$, uma contradição. Portanto $a = 1$ ou $b = 1$. Qualquer uma dessas possibilidades implica $a = b = 1$.

1.2.3 Exercícios Propostos

EP **1.6.** Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, mostre que:

(a) $(-1) \cdot a = -a$;

(b) Se $a^2 = 0$, então $a = 0$;

(c) Se $a^2 = a$, então $a = 0$ ou $a = 1$;

(d) A equação $a + x = b$ tem uma única solução.

EP **1.7.** Mostre que a relação *menor do que ou igual a* ($\leq$) é uma relação de ordem, ou seja, é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

EP **1.8.** Seja $a \in \mathbb{Z}$, mostre que:

(a) Se $a \leq 0$, então $-a \geq 0$;

(b) Se $a \geq 0$, então $-a \leq 0$;

(c) $a^2 \geq 0$ (terminologia usual: todo quadrado é não negativo);

(d) $1 > 0$;

(e) Se $a < b$, então $-a > -b$.

EP **1.9.** Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, prove que:

(a) Se $a \geq b$ e $c \geq 0$, então $ac \geq bc$;

(b) Se $c > 0$ e $ac < bc$, então $a < b$;

(c) Se $a \geq b$ e $c \leq 0$, então $ac \leq bc$;

(d) Se $c < 0$ e $ac > bc$, então $a < b$;

(e) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ (dica: separar em casos, por exemplo: $a, b \geq 0$);

(f) Se $ab > 0$, então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$;

(g) Se $0 \leq a \leq b$ e $0 \leq c \leq d$, então $ac < bd$;

(h) Se $0 \leq a < b$ e $0 < c \leq d$, então $ac < bd$;

(i) Se $a < b$, então $a^2 < b^3$. É verdade que, se $a < b$, então $a^2 < b^2$?

EP **1.10.** Mostre que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{Z}$.

1.3 O Princípio da Indução Completa

As ciências naturais utilizam o método chamado indução empírica para formular leis que devem reger determinados fenômenos a partir de um grande número de observações particulares, selecionadas adequadamente. Esse tipo de procedimento, embora não seja uma demonstração de que um dado fato é logicamente verdadeiro, é frequentemente satisfatório. A validade de um teorema matemático se estabelece de forma totalmente diferente.

Verificar que uma certa afirmação é verdadeira num grande número de casos particulares não permitirá concluir que ela é válida. Por exemplo, considere a expressão $p(n) = n^2 - n + 41$ e considere a seguinte afirmação: *para cada inteiro positivo n o valor $p(n)$ é um número primo*. Para $n = 1$ temos $p(1) = 41$, da mesma forma $p(2) = 43$ e $p(3) = 47$, são números primos, e que, com um pouco de paciência, poderá verificar que a afirmação é verdadeira para os primeiros 40 valores de n, pois $p(41) = 41 \cdot 41$, que não é um número primo.

Se nos deparássemos com a fórmula

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

como verificar sua validade? Evidentemente, é impossível demonstrá-la em todos os casos particulares.

Para demonstrar a verdade desse tipo de proposição, que na realidade é uma sequencia infinita de proposições, uma para cada inteiro positivo, introduziremos o chamado *método de recorrência* ou da *indução completa*.

Nota 4. Conta a história sobre Carl Friederich Gauss quando ainda garoto. Na escola, o professor, para aquietar a turma de Gauss, mandou os alunos calcularem a soma de todos os números naturais de 1 a 100. Qual não foi a surpresa quando, logo em seguida, o menino deu a resposta 5.050. Indagado como tinha descoberto tão rapidamente o resultado, Gauss, então com nove anos de idade, descreveu o método, como segue:

$$S_n=1+2+3+\ldots+n.$$

Somando a igualdade acima, membro e membro, com ela mesma, porém com as parcelas do segundo membro em ordem invertida, temos que

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) \end{array}$$

Daí segue que $2S_n=n(n+1)$, e, portanto

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

1.15 Teorema. Sejam a um inteiro dado e S um conjunto de inteiros maiores ou iguais a a, que tem as seguintes propriedades:

(i) $a \in S$;

(ii) Se um inteiro $k \geq a$ pertence a S, então $k+1$ também pertence a s.

Então S é o conjunto de todos os inteiros maiores ou iguais a a.

Prova: Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então, o conjunto S' dos inteiros maiores ou iguais a a que não pertencem a S seria não-vazio (e limitado inferiormente por a). Como todo conjunto limitado inferiormente tem mínimo, existe um m que é p mínimo de S'. Como $a \in S$, certamente $a < m$, logo $a \leq m-1 < m$. Temos ainda que $m-1 < m = \min(S')$, logo $m-1 \notin S'$, isto é, $m-1 \in S$. Conforme (ii), teremos então que $m=(m-1)+1 \in S$, uma contradição, já que $m \in S'$.

1.16 Corolário (Princípio da Indução Completa)**.** Seja a um inteiro dado. Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação $P(n)$ de forma que:

(i) $P(a)$ é verdadeira;

(ii) Se, para um inteiro $k \geq a$, $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Então a afirmação $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq a$.

Prova: Basta considerar o conjunto S dos inteiros $n \geq a$ para os quais $P(n)$ é verdadeira e verificar que está nas condições do teorema anterior. Assim, S contém todos os inteiros maiores ou iguais a a e segue a tese.

Exemplo 1.1. Provaremos agora que a fórmula $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ a fórmula acima é válida, pois $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$. Deste modo, nossa afirmação é verdadeira para $n = 1$. Deveremos mostrar agora que, se a afirmação é verdadeira para $n = k$, então também é verdadeira para $n = k+1$. Assim, estamos admitindo, então, como hipótese de indução, que $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ é verdadeiro.

Somando $k+1$ a ambos os membros dessa igualdade, temos

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2},$$

isto é,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

que é a fórmula correspondente a $n = k+1$, cuja validade queríamos demonstrar.

Exemplo 1.2. Provaremos agora um resultado da geometria plana: a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é

$$S_n = (n-2) \cdot 180°, \; n \geq 3.$$

De fato, para $n = 3$ temos que o polígono é um triângulo e sabemos da geometria elementar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.

Suponhamos a afirmação válida para $n = k \geq 3$, isto é, que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de k lados é $S_k = (k-2) \cdot 180°$ e consideremos o polígono convexo $a_0 a_2 \ldots a_k$ com $k+1$ lados. O polígono $a_0 a_2 \ldots a_k$ que se obtém traçando o segmento $a_0 a_2$ tem k lados, consequentemente, a soma dos seus ângulos é $S_k = (k-2) \cdot 180°$. Agora, a soma dos ângulos do polígono original será S_k mais a soma dos ângulos do triângulo $a_0 a_1 a_2$, isto é,

$$s_{k+1} = S_k + 180° = (k-2) \cdot 180° + 180° = (k-1) \cdot 180°.$$

Exemplo 1.3. A desigualdade $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$ é falsa para $n = 1$ e $n = 2$. Porém, para $n = 3$, temos $54 > 37$, que é uma afirmação verdadeira. Provaremos que $2n^2 > 3n^2 + 3n + 1$, $n \geq 3$.

Suponhamos, então, que a afirmação é verdadeira para $n = k \geq 3$, isto é, que $2k^3 > 3k^2 + 3k + 1$ é verdadeira. O que deveremos fazer é que a afirmação também é verdadeira para $n = k+1$, isto é, que

$$2(k+1)^3 > 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1.$$

Temos que

$$2(k+1)^3 = 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2.$$

Usando a hipótese de indução, vem

$$\begin{aligned} 2(k+1)^3 &> 3k^2+3k+1+6k^2+6k+2 \\ &= 3(k^2+2k+1)+3k+6k^2 \\ &= 3(k+1)^2+3k+6k^2. \end{aligned}$$

Como $k \geq 3$, temos que $6k^2 \geq 54 > 3+1$ e substituindo na fórmula acima obtemos:

$$2(k+1)^3 > 3(k+1)^2+3k+3+1 = 3(k+1)^2+3(k+1)+1,$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.4. Este exemplo ilustra o primeiro registro da utilização do Princípio da Indução Matemática, feita por Francesco Maurolycus em 1575. Trata-se da determinação de uma fórmula exata em função de $n \geq 1$ para a soma dos n primeiros números naturais ímpares. Ou seja, busca-se uma fórmula para

$$S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

Vamos calcular S_n para alguns valores de n:

$$S_1 = 1,\ \ S_2 = 1+3 = 4,\ \ S_3 = 1+3+5 = 9,\ \ S_4 = 1+3+5+7 = 16,\ \ S_5 = 1+3+5+7+9 = 25.$$

Os casos particulares acima nos conduzem a conjecturar que $S_n = n^2$. Mas como ter certeza de que não estamos cometendo um engano? Bom, o único jeito é usar a indução matemática.

Definamos $p(n) : S_n = n^2$. Temos $p(1) : S_1 = 1 = 1^2$, portanto verdade. Suporemos $p(k)$, $k \geq 1$ verdade, isto é, $1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$ a nossa hipótese de indução. Mostraremos que $p(k+1)$ é também verdade.

Somando $2k+1$ a ambos os lados de $1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$, obtemos

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+(2k+1) = (k+1)^2,$$

ou seja, temos $S_{k+1} = (k+1)^2$, o que nos diz que $p(k+1)$ é verdade.

1.3.1 Método da Recorrência

Antes de concluir esta seção vamos observar que a indução completa fornece também um método para definir novos conceitos, o chamado *método da recorrência*.

Por exemplo, dado um inteiro a podemos definir potência de a de expoente positivo da seguinte forma:

(i) $a^1 = a$;

(ii) Para cada inteiro positivo n, definimos $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Este par de condições dá uma regra que especifica o significado do símbolo a^n para cada inteiro $n \geq 1$. Por convenção, definiremos $a^0 = 1$.

O método de recorrência também é usado para definir o símbolo $n!$ (fatorial de n). Definimos:

(i) $1! = 1$;

(ii) Para cada inteiro positivo $n \geq 2$, definimos $n! = n \cdot (n-1)!$.

Assim, temos $n!$ como o produto de todos os fatores positivos menores ou iguais a n. Define-se, $0! = 1$.

1.17 Proposição. Sejam a e b dois inteiros. Para quaisquer m e n inteiros não negativos, temos que:

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;   (ii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;   (iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Prova: Provaremos apenas (i). Fixemos a e m arbitrariamente e demonstraremos a relação por indução sobre n. Temos claramente, pelas definições, que

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Por outro lado, supondo que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, temos que

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a) = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{m+n+1}.$$

Isto, pelo princípio de Indução Matemática, prova a nossa propriedade.

1.3.2 Exercícios Propostos

EP **1.11.** Mostre as seguintes fórmulas por indução:

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

(c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$;

(d) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

(e) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

EP **1.12.** Ache uma fórmula para cada uma das somas seguintes:

(a) $2 + 4 + \ldots + 2n$;

(b) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n-1)$;

(c) $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n$;

(d) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$.

EP **1.13.** Mostre por indução que:

(a) $2^n > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) $n! > 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$;

(c) $n! > n^2$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$;

(d) $n! > n^3$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(e) $n! > 3^n$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(f) $n < 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(g) $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + \ldots + x^n$ se $x \neq 1$;

(h) $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ se $x \geq 0$;

(i) $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$ se $x \neq 0$.

EP **1.14.** Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Decidir se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:

(a) $(mn)! = m!n!$, para todo $m, n \geq 1$;

(b) $(m+n)! = m! + n!$, para todo $m, n \geq 1$.

EP **1.15.** Sejam a e b inteiros e n um natural. Provar que:

(a) Se n é ímpar e $a^n = b^n$, então $a = b$;

(b) Se n é par e $a^n = b^n$, então $a = \pm b$;

(c) Se a e b são positivos e $a^n < b^n$, então $a < b$.

EP **1.16.** Seja x um número natural. Demonstrar que $(1+x)^n > 1 + nx$, para todo $n \geq 2$.

EP **1.17.** Prove que, traçando n retas num plano, não se pode dividi-lo em mais de 2^n partes.

Capítulo 2

Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis

2.1 Conjuntos Finitos

Para o nosso propósito, quanto ao número de elementos de um conjunto, é necessário apenas distinguir três tipos de conjuntos: os finitos, os enumeráveis e os não-enumeráveis. A noção de conjunto enumerável está estreitamente ligada ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, em que os empregamos para a contagem dos conjuntos finitos, mostrando como eles podem ser considerados como números cardinais e completando, portanto, sua descrição.

Como vimos no início, o conjunto $\mathbb{N}$ é o conjunto usado para contagens. Quando queremos contar, por exemplo, o número de integrantes do grupo *Os Três Mosqueteiros* procedemos da seguinte maneira. A cada integrante associamos um elemento do conjunto $\mathbb{N}$, seguindo a sua ordem usual:

$$\text{D'Artagnan } 1, \quad \text{Athos } 2, \quad \text{Porthos } 3, \quad \text{Aramis } 4.$$

Acabamos de definir uma função injetiva φ do conjunto $A = \{\text{ Os Três Mosqueteiros }\}$ no conjunto $\mathbb{N}$, de modo que $\varphi(\text{D'Artagnan}) = 1$, $\varphi(\text{Athos}) = 2$, $\varphi(\text{Porthos}) = 3$ e $\varphi(\text{Aramis}) = 4$. Bastava tomar o conjunto $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ como contra-domínio que f ainda seria injetiva. Porém, isto não seria possível se I_4 fosse $\{1, 2, 3\}$ pois, neste caso, pelo menos um elemento de I_4 estaria associado a mais de um músico (e portanto f não seria injetiva). De fato, 4 é o menor número n tal que o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ possa ser contra-domínio sem que φ deixe de ser injetiva.

Vejamos outro exemplo de contagem. Um professor vai aplicar uma prova e não tem certeza se a sala destinada a este feito tem um número suficiente de cadeiras para acomodar os alunos. Ele pode contar as cadeiras e os alunos e comparar os resultados para obter a resposta. Uma alternativa óbvia a este método é pedir aos alunos que se acomodem e três coisas podem acontecer ao final do processo:

(i) existem alunos de pé e todas as cadeiras estão ocupadas;

(ii) existem cadeiras livres e todos os alunos estão sentados;

(iii) todos os alunos estão sentados e todas as cadeiras estão ocupadas.

No primeiro, caso temos que o número de alunos é maior que o de cadeiras; no segundo caso, ocorre o contrário e, finalmente, no terceiro eles são iguais. Obtemos, assim, a resposta à pergunta "qual conjunto tem mais elementos?" sem necessariamente conhecer os números de elementos dos conjuntos envolvidos. Estas considerações motivam a seguinte definição.

Notação! Indicaremos pelo símbolo I_n o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ dos números naturais, desde 1 até n. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$I_n = \{p \in \mathbb{N};\ 1 \leq p \leq n\}.$$

Estas considerações nos levam às seguintes definições.

2.1 Definição. Seja A um conjunto não-vazio. Se existe $n \in \mathbb{N}$ e uma função injetiva $\varphi : A \to I_n$ diremos que A é *finito*; caso contrário, A é *infinito*. O menor número n que verifica esta propriedade é dito número de elementos de A e escrevemos $\#A = n$. Diremos também que o conjunto vazio é finito e que seu número de elementos é zero.

2.2 Definição. Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. Dizemos que A e B têm a mesma *cardinalidade* ou que a cardinalidade de A é igual à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $\varphi : A \to B$. Caso contrário dizemos que eles não têm a mesma cardinalidade ou que suas cardinalidades são diferentes e escrevemos $\#A \neq \#B$.

2.3 Definição. Sejam A e B conjuntos não-vazios. Se existe função injetiva $\varphi : A \to B$, então dizemos que a cardinalidade de A é menor ou igual à de B e escrevemos $\#A \leq \#B$. Se existe uma função sobrejetiva $\psi : A \to B$, então dizemos que a cardinalidade de A é maior ou igual à de B e escrevemos $\#A \geq \#B$.

Observamos que o número de elementos de um conjunto finito A não vazio é bem definido graças ao Princípio da Boa Ordem. De fato, o conjunto dos números $n \in \mathbb{N}$ que verificam a propriedade "existe função injetiva $\varphi : A \to I_n$" é um subconjunto não vazio (pois A é finito) de $\mathbb{N}$ e, portanto, possui um elemento mínimo.

Os seguintes fatos decorrem imediatamente das definições:

(i) Cada conjunto I_n é finito e possui n elementos, ou seja $\#I_n = n$;

(ii) Se $\varphi : A \to B$ é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro é.

Intuitivamente, uma bijeção $\varphi : I_n \to A$ significa uma *contagem* dos elementos de A. Pondo $\varphi(1) = a_1,\ \varphi(2) = a_2, \ldots,\ \varphi(n) = a_n$, temos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito.

Para que o número de elementos de um conjunto não seja uma noção ambígua devemos provar que, se existem duas bijeções $\varphi : I_n \to A$ e $\psi : I_m \to A$, então $m = n$. Considerando a função composta $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : I_n \to I_m$, basta então provar que, se existe uma bijeção $\xi : I_n \to I_m$, então $m = n$. Para fixar idéias, suponhamos $m \leq n$. Daí, $I_m \subset I_n$. A unicidade do número de elementos de um conjunto finito será, portanto, uma consequência da proposição mais geral seguinte.

2.4 Teorema. Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $\varphi : I_n \to A$, então $A = I_n$.

Prova: Veja, por exemplo, em Elon volume 01.

Como consequência desta, temos:

2.5 Corolário. Não pode existir uma bijeção $\varphi : A \to B$ de um conjunto finito A sobre uma parte própria $B \subset A$.

2.6 Teorema. Se A é um conjunto finito então todo subconjunto $B \subset A$ é finito. O número de elementos de B não excede o de A e só é igual quando $B = A$.

Prova: A prova deste teorema é decorrente da indução completa combinado com o teorema anterior. Veja, por exemplo, em Elon volume 01.

2.7 Corolário. Seja $\varphi : A \to B$ uma função injetiva. Se B for finito então A também será. Além disso, o número de elementos de A não excede o de B.

2.8 Proposição. Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. Então $\#A \leq \#B$ se, e somente se, $\#B \geq \#A$.

Suponhamos $\#A \leq \#B$ e mostremos que $\#B \geq \#A$. Por definição, existe uma função injetiva $\varphi : A \to B$. Para concluir, devemos mostrar que existe função sobrejetiva $\psi : B \to A$. Fixemos um elemento $y_0 \in A$. Para todo $x \in B$ definimos $\psi(x)$ da seguinte maneira. Se $x \notin \varphi(A)$ tomamos $\psi(x) = y_0$, senão, se $x \in \varphi(A)$, então, pela injetividade de φ, existe um único $y \in A$ tal que $\varphi(y) = x$. Neste caso, tomamos $\psi(x) = y$.

Mostremos que ψ é sobrejetiva. Seja $y \in A$ e $x = \varphi(y)$. Temos $x \in \varphi(A)$ e, por definição de ψ, segue que $\psi(x) = y$. Mostremos agora a recíproca, isto é, que se $\#B \geq \#A$, então $\#A \leq \#B$. Por hipótese, existe uma função sobrejetiva $\psi : B \to A$. Logo, para todo $y \in A$ podemos escolher $x \in B$ tal que $\psi(x) = y$. Definimos $\varphi(y) = x$. Mostremos que φ é injetiva. Se $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$ (com $y_1, y_2 \in A$), então $y_1 = \psi(\varphi(y_1)) = \psi(\varphi(y_2)) = y_2$.

Verifique! || Se $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, então $\#A = \#B$.

Exemplo 2.1.

(a) Seja A um conjunto não vazio. É evidente que $\#A = \#A$, pois a função identidade $Id : A \to A$ dada por $Id(x) = x$ para todo $x \in A$ é uma bijeção.

(b) Sejam A e B dois conjuntos não-vazios, com $A \subset B$. Obviamente $\#A \leq \#B$, pois a função $Id : A \to B$ dada por $Id(x) = x$ para todo $x \in A$ é injetiva.

No exemplo seguinte vamos mostrar que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ é a mesma do conjunto $\mathbb{Z}$.

Exemplo 2.2. Escrevendo $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ uma bijeção de $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ nos salta aos olhos. Ela é dada por $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = -1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = -2$, $\varphi(6) = 3, \ldots$, mais precisamente,

$$\varphi(n) = \begin{cases} m, & \text{se } n = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \\ -m, & \text{se } n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Assim, concluímos que $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$.

Exemplo 2.3. É verdade que $\#\mathbb{N}^2 = \#\mathbb{N}$. De fato, $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{N}^2$, pois a função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ dada por $\varphi(n) = (n, n)$ é claramente injetiva. Por outro lado, vejamos que $\#\mathbb{N}^2 \leq \#\mathbb{N}$. Pela unicidade da fatoração de naturais como produto de primos (Teorema Fundamental da Aritmética), temos que a função $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dada por $\psi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ é injetiva. Outra demonstração, bastante popular, para $\#\mathbb{N}^2 = \#\mathbb{N}$ é obtida através do esquema mostrado na figura no Exemplo 2.6.

Uma bijeção $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ é definida seguindo as setas da seguinte maneira:

$$\xi(1) = (1, 1), \ \ \xi(2) = (1, 2), \ \ \xi(3) = (2, 1), \ \ \xi(4) = (1, 3), \ \ \xi(5) = (2, 2), \ldots$$

Definimos anteriormente conjunto infinito como sendo o conjunto que não é finito. Explicitaremos esse fato. O conjunto A é infinito quando não é vazio e, além disso, seja qual for o $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $\varphi : I_n \to A$.

Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. De fato, dada qualquer função $\varphi : I_n \to \mathbb{N}$, seja $p = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)$. Então $p > \varphi(x)$, para todo $x \in I_n$, donde $p \notin \varphi(I_n)$. Logo, nenhuma função $\varphi : I_n \to \mathbb{N}$ é sobrejetiva.

Outra maneira de verificar que $\mathbb{N}$ é infinito é considerar o conjunto $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dos números pares e definir a bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, em que $\varphi(n) = 2n$. Como $\mathbb{P}$ é uma parte própria de $\mathbb{N}$, segue-se do corolário 2.5 que $\mathbb{N}$ não é finito

Os fatos vistos acima sobre conjuntos finitos fornecem, por exclusão, resultados sobre conjuntos infinitos. Por exemplo, se $\varphi : A \to B$ é injetiva e A é infinito, então B também é.

Outros exemplos de conjuntos infinitos são $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, pois ambos contêm o conjunto $\mathbb{N}$. Segundo uma proposição devida a Euclides, o conjunto dos números primos é infinito.

2.9 Definição. Um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ chama-se *limitado* quando existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ seja qual for o $n \in A$.

Caracterizaremos agora os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

2.10 Teorema. Seja $A \subset \mathbb{N}$ não-vazio. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é finito;

(b) A é limitado;

(c) A possui um maior elemento.

Prova: Ver, por exemplo, em Elon volume 01.

Um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ chama-se ilimitado quando não é limitado. Isso significa que, dado qualquer $m \in \mathbb{N}$, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > m$. Os conjuntos ilimitados $A \subset \mathbb{N}$ são, como acabamos de ver, precisamente os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

2.11 Teorema. Sejam A e B conjuntos disjuntos tais que $\#A = m$ e $\#B = n$. Então, $A \cup B$ é finito e $\#(A \cup B) = m + n$.

Prova: Dadas as bijeções $\varphi : I_m \to A$ e $\psi : I_n \to B$, definamos a função $\xi : I_{m+n} \to A \cup B$ pondo $\xi(x) = \varphi(x)$ se $1 \leq x \leq m$ e $\xi(m + x) = \psi(x)$ se $1 \leq x \leq n$. Como $A \cap B = \varnothing$, constata-se que ξ é uma bijeção.

O corolário seguinte obtém-se aplicando $k - 1$ vezes o teorema.

2.12 Corolário. Sejam $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos finitos, disjuntos dois a dois, com $\#A_i = m_i$. Então, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ é finito e possui $\displaystyle\sum_{i}^{k} m_i$ elementos.

Nota 5. Se, no corolário acima, eliminarmos a hipótese de disjunção dos conjuntos dois a dois, então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ terá no máximo $\displaystyle\sum_{i}^{k} m_i$ elementos.

2.13 Corolário. Sejam $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos finitos com $\#A_i = m_i$. Então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é finito e possui $\displaystyle\prod_{i}^{k} m_i$ elementos.

2.2 Conjuntos Enumeráveis e Conjuntos Não-Enumeráveis

2.14 Definição. Dizemos que um conjunto A é *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $\varphi : A \to \mathbb{N}$ (ou $\varphi : \mathbb{N} \to A$). No segundo caso, A diz-se *infinito enumerável* e, pondo-se $a_1 = \varphi(1), a_2 = \varphi(2), \ldots, a_n = \varphi(n), \ldots$, tem-se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Cada bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to A$ chama-se uma *enumeração* (dos elementos) de A.

Nota 6. Temos que $A \neq \varnothing$ é enumerável se, e somente se, $\#A \leq \#\mathbb{N}$.

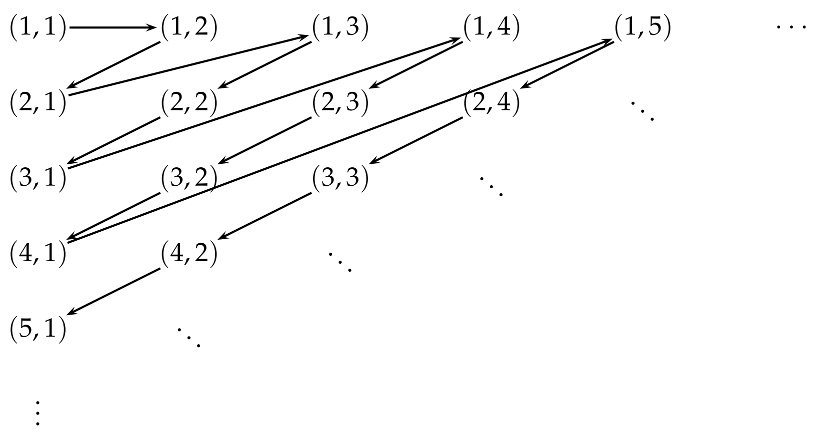
Exemplo 2.4. A bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, definida por $\varphi(n) = 2n$, mostra que o conjunto $\mathbb{P}$ dos números pares é infinito enumerável. Analogamente, $\psi : n \mapsto 2n - 1$ define uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre o conjunto dos números naturais ímpares, o qual é, portanto, infinito enumerável.

Exemplo 2.5. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é infinito enumerável. Basta notar que a função $\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definida por

$$\xi(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n > 0 \\ -2n+1, & \text{se } n \leq 0 \end{cases}$$

é uma bijeção. Logo, $\xi^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é uma enumeração para $\mathbb{Z}$. O exemplo 2.2 é outra maneira, na verdade equivalente a esta, de mostrar que $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Exemplo 2.6. $\mathbb{Q}$ é enumerável. Veremos uma demonstração deste resultado, mais adiante na seção de corpos ordenados, quando estabelecermos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$. Por hora, apresentamos uma figura (abaixo) ilustrando uma contagem para $\mathbb{Q}$, de uma lista de dupla entrada onde as primeiras coordenadas representam os numeradores e as segundas coordenadas os denominadores.



2.15 Proposição. Se A e B são enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável.

Prova: Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, então a proposição é imediata. Suponhamos que ambos sejam não-vazios. Então, existem funções injetivas $\varphi : A \to \mathbb{N}$ e $\psi : B \to \mathbb{N}$. Definimos $\xi : A \cup B \to \mathbb{N}$ da seguinte maneira:

$$\xi(x) = \begin{cases} 2\varphi(x), & \text{se } x \in A, \\ 2\psi(x)+1, & \text{se } x \in B \backslash A. \end{cases}$$

Temos que ξ é bem definida e é, claramente, injetiva (observe que $\xi(A) \cap \xi(B) = \varnothing$ pois os elementos de $\xi(A)$ são números pares, enquanto que os de $\xi(B \backslash A)$ são ímpares).

Mais geralmente, temos:

2.16 Proposição. Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n é enumerável, então $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é enumerável.

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que $A_n \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Por hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que A_n é enumerável, logo, existe $\varphi_n : \mathbb{N} \to A_n$ sobrejetiva. Vamos mostrar que a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & A \\ & (n, m) & \mapsto & \varphi_n(m) \end{array}$$

é sobrejetiva. De fato, se $x \in A$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Como φ_n é sobrejetiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_n(m) = x$. Segue que $\varphi(n, m) = \varphi_n(m) = x$. No exemplo 2.3 vimos que $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{N}^2$. Portanto, existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ sobrejetiva. Segue que $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to A$ é sobrejetiva.

Em outras palavras, o teorema acima diz que: *uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

2.17 Teorema. Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Prova: Se A for finito, é enumerável. Se for infinito, definiremos indutivamente uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Poremos $\varphi(1)$ como o menor elemento de A. Suponhamos $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ definidos de modo a satisfazerem as seguintes condições:

(a) $\varphi(1) < \varphi(2) < \ldots < \varphi(n)$;

(b) pondo $B_n = A - \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$, tem-se $\varphi(n) < x$ para todo $x \in B_n$

Em seguida, notando que $B_n \neq \varnothing$ (pois A é infinito) definimos $\varphi(n+1)$ como o menor elemento de B_n. Isto completa a definição de $\varphi : \mathbb{N} \to A$, de modo a serem mantidas as condições (a) e (b) para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se de (a) que φ é injetiva. Por outro lado, (b) implica que φ é sobrejetiva pois, se existisse algum $x \in A - \varphi(\mathbb{N})$, teríamos $x \in B_n$ para todo n e, portanto, $x > \varphi(n)$, qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$. Então o conjunto infinito $\varphi(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ seria limitado, uma contradição, em vista do Teorema 2.10.

2.18 Corolário. Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Ou, se $\varphi : A \to B$ é injetiva e B é enumerável, então A é enumerável.

2.19 Proposição. Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Então o produto cartesiano $A \times B$ é enumerável.

Prova: Por hipótese existem funções $\varphi : A \to \mathbb{N}$ e $\psi : B \to \mathbb{N}$. Logo $\xi : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $\xi(a, b) = (\varphi(a), \psi(b))$ é injetiva. Assim sendo, pelo fato que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável (consequência do Exemplo 2.3). Segue pelo Corolário 2.18 que $A \times B$ é enumerável.

2.20 Proposição. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos enumeráveis, então $A_1 \times \ldots \times A_n$ é enumerável.

Prova: Deixamos como exercício a verificação deste resultado, que pode ser obtida por indução.

Nota 7. O principal exemplo de conjunto não enumerável que veremos é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, como veremos mais adiante. Cantor mostrou que existem conjuntos não enumeráveis, mais geralmente, dado um conjunto A, sempre existe um conjunto cujo número cardinal é maior do que o de A.
Um exemplo de conjunto não enumerável é considerar o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots$ de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ infinitos enumeráveis.

Capítulo 3

Números Reais

Tudo quanto vai ser dito no decorrer deste material se referirá a conjuntos de números reais: funções definidas e tomando valores nesses conjuntos, limites, continuidade, derivadas e integrais dessas funções. Por isso, vamos estabelecer neste capítulo os fundamentos da teoria dos números reais, o conjunto $\mathbb{R}$, como um corpo ordenado completo.

Enunciaremos os axiomas de corpo para que possamos estabelecer as propriedades dos números reais, que são decorrentes logicamente dos axiomas de corpo, que enunciaremos. Estes axiomas apresentam o conjunto $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo. Veremos, aqui, que este conjunto não é enumerável.

Vejamos o que é um corpo.

3.1 Corpos

Um *corpo* é um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas os *axiomas de corpo*, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ sua *soma* $x + y \in \mathbb{K}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu *produto* $x \cdot y \in \mathbb{K}$. Os axiomas de corpo são os seguintes:

(A) Axiomas da Adição

(A1) A soma é *associativa*:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K};\ \ (x + y) + z = x + (y + z).$$

(A2) A soma é *comutativa*:

$$\forall x, y \in \mathbb{K};\ \ x + y = y + x.$$

(A3) A soma tem *elemento neutro*, designado por 0, isto é,

$$\forall x \in \mathbb{K};\ \ x + 0 = 0 + x = x.$$

(A4) Qualquer número real tem *simétrico*, isto é,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \exists y \in \mathbb{K};\ \ x + y = y + x = 0.$$

O simétrico do número real x designar-se-á $-x$.

3.1 Observação.

(a) A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e chamada a *diferença* entre x e y. A operação $(x, y) \mapsto x - y$ chama-se *subtração*;

(b) Somando-se y a ambos os membros de uma igualdade do tipo $x - y = z$, obtém-se $x = y + z$. Analogamente, se $x = y + z$ então, somando-se $-y$ a ambos os membros, obtém-se $x - y = z$. Portanto, $x - y = z \Leftrightarrow x = y + z$;

(c) Do item acima, temos que o 0 é único. Ou seja, se $x + \theta = x$, para algum $x \in \mathbb{K}$ e para algum $\theta \in \mathbb{K}$, então $\theta = x - x = 0$. Do mesmo modo, todo $x \in \mathbb{K}$ tem somente um simétrico, ou seja, se $x + y = 0$, então, $y = 0 - x = -x$;

(d)Temos, também, que $-(-x) = x$, já que $(-x) + x = 0$;

(e) Finalmente, vale a lei do corte: $x + z = y + z \Rightarrow x = y$, pois basta somar a ambos os membros da primeira igualdade.

(B) Axiomas da Multiplicação

(M1) O produto é *associativo*:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K};\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(M2) O produto é *comutativo*:

$$\forall x, y \in \mathbb{K};\ \ x \cdot y = y \cdot x.$$

(M3) O produto tem *elemento neutro*, designado por 1, isto é,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

(M4) Qualquer número real não nulo tem *inverso multiplicativo*, isto é,

$$\forall x \in \mathbb{K} \backslash \{0\},\ \exists y \in \mathbb{K};\ \ x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

O inverso do número $x \neq 0$ designar-se-á por x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$.

3.2 Observação.

(a) Dados x e y em $\mathbb{K}$, com $y \neq 0$, escreve-se também $\dfrac{x}{y}$ em vez de $x \cdot y^{-1}$. A operação $(x, y) \mapsto \dfrac{x}{y}$, definida para qualquer x e todo $y \neq 0$ em $\mathbb{K}$, chama-se *divisão* e o resultado $\dfrac{x}{y}$ é o *quociente* de x por y. Não se divide por zero: $\dfrac{x}{0}$ não tem sentido, assim o zero não possui inverso multiplicativo;

(b) Se $y \neq 0$, tem-se $\dfrac{x}{y} = z \Rightarrow x = y \cdot z$. Daí se deduz a utilíssima lei do corte:

$$\text{se } x \cdot z = y \cdot z, \text{ então } x = y, \text{ desde que } z \neq 0;$$

(c) Se $x \cdot y = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$ então, tomando $x = 1$ obtemos $y = 1$, garantindo a unicidade do 1. Agora, se $x \cdot y = x$ e não se sabe se $x \neq 0$, não podemos garantir que $y = 1$.

Por fim, as operações de adição e multiplicação num corpo $\mathbb{K}$ acham-se relacionadas por um axioma, com o qual fica completa a definição de corpo.

(C) Axiomas da Distributividade

(D1) O produto é *distributivo* relativamente à adição, isto é,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K};\ \ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ e } (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

3.3 Observação.

(a) Resulta deste axioma que $x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in \mathbb{K}$, pois

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x \cdot (0+1) = x \cdot 1 = x.$$

(b) Dados $x, y \in \mathbb{K}$ tais que $x \cdot y = 0$, temos $x = 0$ ou $y = 0$. De fato, se $x \cdot y = 0$ e $x \neq 0$, então obtemos $x \cdot y = x \cdot 0$ e, por corte, $y = 0$. Assim, num corpo $\mathbb{K}$, tem-se $x \cdot y \neq 0$ sempre que os dois fatores x e y forem ambos diferentes de zero.

(c) Podemos, ainda, usar este axioma para a explicação das "regras dos sinais" da Álgebra Elementar:

⋄ $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x+x) \cdot y = 0 \cdot y = 0 \Rightarrow (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

Analogamente, obtém-se $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

⋄ $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$:

$$(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y.$$

Em particular $(-1) \cdot (-1) = 1$.

(d) Dados $x, y \in \mathbb{K}$ tais que $x^2 = y^2$, temos que $x = \pm y$. De fato, $x^2 = y^2$ implica $x^2 - y^2 = 0$, donde $(x-y) \cdot (x+y) = 0$. Assim $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. No primeiro caso temos $x = y$ e no segundo $x = -y$.

Notação || Usa-se a notação $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ para indicar que $\mathbb{K}$ é um corpo munido das operações $+$ e $\cdot$.

Exemplo 3.1. O conjunto dos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$, é definido por

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q};\ \ p, q \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ q \neq 0 \right\}$$

com as operações $\dfrac{p}{q} + \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{p \cdot q' + p' \cdot q}{q \cdot q'}$ e $\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{p \cdot p'}{q \cdot q'}$ é um corpo. O 0 é $\dfrac{0}{q}$ para qualquer $q \neq 0$. O simétrico aditivo de $\dfrac{p}{q}$ é $-\dfrac{p}{q}$ e, o inverso multiplicativo do número racional $\dfrac{p}{q} \neq 0$ é $\dfrac{q}{p}$.

Exemplo 3.2. O conjunto $\mathbb{Q}(t)$, das funções racionais $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$, onde p e q são polinômios com coeficientes racionais, sendo q não identicamente nulo é um corpo. Verifique.

Exemplo 3.3. O conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, formado apenas de dois elementos distintos 0 e 1, com as operações $0+1 = 1+0 = 1$, $0+0 = 1+1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ e $1 \cdot 1 = 1$ é um corpo. Aqui, o simétrico de cada elemento é ele próprio e o inverso também.

3.1.1 Corpos Ordenados

Um *corpo ordenado* é um corpo $\mathbb{K}$, no qual se destacou um subconjunto $P \subset \mathbb{K}$, chamado o conjunto dos elementos *positivos* de $\mathbb{K}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(P1) A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja,

$$x, y \in P \Rightarrow x + y \in P \quad \text{e} \quad x \cdot y \in P;$$

(P2) Dado $x \in \mathbb{K}$, exatamente uma das três alternativas ocorre:

$$x = 0, \quad \text{ou} \quad x \in P \quad \text{ou} \quad -x \in P.$$

Indicamos por $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, tal que $x \in P$. Assim, $\mathbb{K} = P \sqcup \{0\} \sqcup (-P)$, em que $\sqcup$ significa união disjunta. Os elementos de $-P$ chamam-se *negativos*. Note que, num corpo ordenado, se $a \neq 0$, então $a^2 \in P$. De fato, sendo $a \neq 0$, temos $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso, $a^2 = a \cdot a \in P$ e, no segundo, $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in P$. Em particular, num corpo ordenado $\mathbb{K}$, $1 \cdot 1 = 1$ é sempre positivo e -1 não é quadrado de elemento algum.

Exemplo 3.4.

(a) $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, no qual o conjunto P é formado pelos números racionais $\dfrac{p}{q}$ tais que $p \cdot q \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, p e q têm o mesmo sinal.

(b) O corpo $\mathbb{Q}(t)$ pode ser ordenado chamando-se uma fração $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$ positiva quando, no polinômio $p \cdot q$, o coeficiente do termo de mais alto grau for positivo. O conjunto P das frações positivas, segundo esta definição, cumpre as condições (P1) e (P2).

Nota 8. O corpo $\mathbb{Z}_2$ não pode ser ordenado, pois $1 + 1 = 0$ enquanto num corpo ordenado 1 deve ser sempre positivo e a soma $1 + 1$, de dois elementos positivos deveria ser ainda positiva.

3.1.2 Relação de Ordem

Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, escrevemos $x < y$, e diremos que x é *menor do que* y, para significar que $y - x \in P$, ou seja, que $y = x + z$, onde $z \in P$. Do mesmo, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y é *maior do que* x. Em particular $x > 0$ significa que $x \in P$, isto é, x é positivo, enquanto que $x < 0$ quer dizer que x é negativo, ou seja, $-x \in P$. Se $x \in P$ e $y \in -P$, tem-se sempre que $x > y$.

3.4 Proposição. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Então, a relação $<$ goza das seguintes propriedades:

(i) Transitividade: se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;

(ii) Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{K}$, ocorre exatamente uma das alternativas:

$$x = y, \quad \text{ou} \quad x < y, \quad \text{ou} \quad y < x$$

(iii) Monotonicidade da Adição: se $x < y$, então $x + z < y + z$, $\forall\, z \in \mathbb{K}$;

(iv) Monotonicidade da Multiplicação: se $x < y$, então $x \cdot z < y \cdot z$ quando $z > 0$ e $x \cdot z > y\dot{z}$ quando $z < 0$.

Prova: Elon p. 13 ed 10

Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, escreve-se $x \leq y$ para significar $x < y$ ou $x = y$, em que lê-se: "x é menor do que ou igual a y". Do mesmo modo, escreve-se $y \geq x$. Isto quer dizer efetivamente que $y - x \in P \cup \{0\}$. Os elementos de $P \cup \{0\}$ chamam-se *não-negativos* e são caracterizados pela relação $x \geq 0$.

3.5 Definição. Uma relação $\preceq$ num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é dita *relação de ordem total* ou, simplesmente, *relação de ordem* se valem as seguintes propriedades.

(i) Ela é transitiva: se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$;

(ii) Ela é anti-simétrica: se $x \preceq y$ e $y \preceq x$, então $x = y$;

(iii) Ela é completa: $\forall\, x, y \in \mathbb{K}$ temos $x \preceq y$ ou $y \preceq x$;

(iv) A adição é monótona: se $x \preceq y$, então $x + z \preceq y + z$, $\forall\, z \in \mathbb{K}$;

(v) A multiplicação é monótona: se $x \preceq y$, então $x \cdot z \preceq y \cdot z$ quando $z \succeq 0$ e $x \cdot z \succeq y\dot{z}$ quando $z \preceq 0$.

3.6 Proposição. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Então, a relação $\leq$ é uma relação de ordem.

Prova: Deixamos como exercício.

Importante! Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, como $1 > 0$, temos $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \ldots$ e o subconjunto de $\mathbb{K}$ formado por estes elementos é, portanto, infinito. Assim, podemos ver que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ está imerso em $\mathbb{K}$, isto é $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$.

Como estamos fazendo, os simétricos $-n$ dos elementos $n \in \mathbb{N}$ e mais o zero ($0 \in \mathbb{K}$) constituem o conjunto $\mathbb{Z}$. Assim temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Assim, podemos provar a seguinte proposição.

3.7 Proposição. $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Prova: Mostraremos que $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, temos que $\#N \leq \#\mathbb{Q}$. Assim, precisamos mostrar que $\#\mathbb{N} \geq \#\mathbb{Q}$. A definição de número racional diz que a função $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $\varphi(m, n) = \dfrac{m}{n}$ é sobrejetiva. Pelo exemplo 2.5, temos que $\mathbb{Z}$ é enumerável, e a Proposição 2.19 diz que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ também é enumerável. Logo, existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sobrejetiva. Terminamos a demonstração observando que $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ é sobrejetiva.

Módulo ou Valor Absoluto

A relação de ordem em $\mathbb{K}$ permite-nos definir o valor absoluto, ou módulo, de um número $x \in \mathbb{K}$, vejamos.

3.8 Definição (Módulo ou Valor Absoluto)**.** O módulo ou valor absoluto de um número $x \in \mathbb{K}$ é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

A noção de valor absoluto é de muita importância em Análise. Por isso, é preciso ter em mente algumas de suas propriedades e a sua definição.

Fique atento! O valor absoluto de x é o maior dos números x e $-x$. Assim, outra maneira de se definir o valor absoluto consiste em pôr:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Quando $x = 0$ tem-se, é claro, $x = -x = |x| = 0$. Temos, portanto, que

$$|x| \geq 0 \quad \text{e} \quad -|x| \leq x \leq |x|.$$

Mais geralmente, temos:

3.9 Teorema. Sejam x e $a \geq 0$ elementos de um corpo ordenado $\mathbb{K}$. São equivalentes:

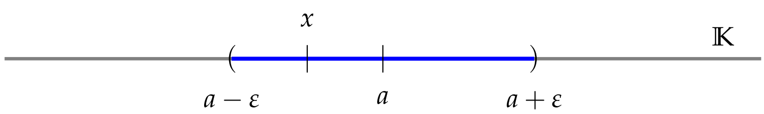
(i) $-a \leq x \leq a$; (ii) $x \leq a$ e $-x \leq a$; (iii) $|x| \leq a$.

3.10 Corolário. Dados $a, b, x \in \mathbb{K}$, tem-se $|x - a| \leq b$ se, e somente se, $a - b \leq x \leq a + b$.

Em particular, temos as seguintes equivalências, que serão utilizadas amplamente no estudo dos limites e das funções contínuas:

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon.$$

Se representarmos geometricamente os elementos de um corpo ordenado como pontos de uma reta, o valor absoluto $|x - a|$ significa a distância do ponto x ao ponto a. As equivalências acima exprimem o fato de que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro a e raio ε, é formado pelos pontos x cuja distância a a é menor do que ε.



3.11 Teorema. Para elementos arbitrários de um corpo ordenado $\mathbb{K}$, valem:

(i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(iii) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$;

(iv) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Prova:

(i) Note que, seja qual for $x \in \mathbb{K}$, temos $x^2 = |x|^2$, pois $|x|$ é um dos elementos $-x$ ou x e vale $x^2 = (-x)^2$. Logo

$$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2.$$

Segue-se daí que $|x \cdot y| = \pm|x| \cdot |y|$. Como $|x \cdot y|$ e $|x| \cdot |y|$ são ambos positivos, concluímos que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(ii) Temos que, $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, donde, por adição, $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Ou seja, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(iii) Por (ii), temos $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, o que dá $|x| - |y| \leq |x - y|$. Analogamente, $|y| - |x| \leq |y - x|$. Claro que $|y - x| = |x - y|$. Concluímos que $|y| - |x| \leq |x - y|$. Assim, valem, simultaneamente,

$|x-y| \geq |x| - |y|$ e $|x-y| \geq -(|x|-|y|)$. Logo, $||x|-|y|| \leq |x-y|$. A outra é óbvia!

(iv) Esta última resulta de (ii) aplicada à soma $x - z = (x-y) + (y-z)$.

3.12 Definição.

1. Um subconjunto X de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ chama-se *limitado superiormente* quando existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras tem-se $X \subset (-\infty, b]$. Cada b com essa propriedade chama-se *conta superior* de X.

2. Analogamente, $X \subset \mathbb{K}$ diz-se *limitado inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $x \geq a$ para todo $x \in X$. Um elemento $a \in \mathbb{K}$ com esta propriedade chama-se *conta inferior* de X. Tem-se, então, $X \subset [a, +\infty)$.

3. Um subconjunto X de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ chama-se *limitado* quando é limitado superiormente e inferiormente, isto é, quando existem $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $X \subset [a, b]$.

3.13 Proposição. Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, são equivalentes:

(i) $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente;

(ii) dados $a, b \in \mathbb{K}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;

(iii) dados qualquer $a > 0$ em $\mathbb{K}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

Saiba que... Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ chama-se *arquimediano* quando nele é válida qualquer das três condições equivalentes citadas na proposição acima.

3.14 Definição.

1. Seja X um subconjunto de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{K}$ chama-se *supremo* do conjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em $\mathbb{K}$. Usamos a seguinte notação: $b = \sup X$;

2. Analogamente, um elemento $a \in \mathbb{K}$ chama-se *ínfimo* do conjunto limitado inferiormente $Y \subset \mathbb{K}$, quando a é a maior das contas inferiores de Y. Usamos a seguinte notação: $a = \inf Y$.

Nota 9.

$\diamond$ $b \in \mathbb{K}$ é supremo de um conjunto $X \subset \mathbb{K}$ se:

(S1) $x \in X \;\Rightarrow\; x \leq b$;

(S2) $c \geq x,\ \forall\, x \in X \;\Rightarrow\; c \geq b$.

$\diamond$ $a \in \mathbb{K}$ é ínfimo de um conjunto $Y \subset \mathbb{K}$ se:

(I1) $y \in Y \;\Rightarrow\; y \geq a$;

(I2) $c \leq y,\ \forall\, y \in Y \;\Rightarrow\; c \leq a$.

Condição (S2) acima, afirma que qualquer outra cota superior de um conjunto X deve ser maior do que ou igual ao $\sup X$. Analogamente, a condição (I2) no diz que qualquer outra cota inferior de um conjunto Y deve ser menor ou igual ao $\sup Y$.

Atenção! Se $X = \varnothing$ então todo $b \in \mathbb{K}$ é cota superior de X. Como não existe menor elemento num corpo ordenado $\mathbb{K}$, segue-se que o conjunto vazio não possui supremo. O mesmo se aplica para ínfimo.

3.15 Observação. Se um conjunto $X \subset \mathbb{K}$ possuir elemento máximo, este será o seu supremo, e, se possuir elemento mínimo, ele será seu ínfimo. Reciprocamente, se $\sup X$ pertence a X então é o maior elemento de X e, se $\inf X$ pertencer a X, será o seu menor elemento. Em particular, todo subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ finito possui ínfimo e supremos.

Exemplo 3.5.

(a) Sejam os conjuntos $X = (-\infty, k_1]$ e $Y = [k_2, +\infty)$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Então $k_1 \sup X \in X$ e $k_2 = \inf Y \in Y$;

(b) Dados $a < b$ em $\mathbb{K}$, seja $X = (a, b)$ o intervalo aberto com esses extremos. Tem-se $\inf X = a \notin X$ e $\sup X = b \notin X$;

(c) Seja Y o conjunto das frações do tipo $\dfrac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\inf Y = 0 \notin Y$ e $\sup Y = \dfrac{1}{2} \in Y$.

3.1.3 A polêmica Descoberta dos Incomensuráveis: os Números Irracionais

A insuficiência mais grave dos números racionais, para efeitos da Análise Matemática, é o fato de que alguns conjuntos limitados de números racionais não possuem supremo (ou ínfimo). Este fato está ligado à inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros, mas é uma dificuldade que vai muito além dessa falta.

3.16 Definição. Dois segmentos quaisquer são *comensuráveis* se existir um terceiro segmento, menor que os dois primeiros, tal que cada um deles é múltiplo inteiro do menor. Em outras palavras, se a e b são os comprimentos dos dois segmentos, então existe um segmento de comprimento c e dois inteiros m e n tais que $a = mc$ e $b = nc$. Daí conclui-se que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$.

Pitágoras e seus discípulos descobriram o seguinte:

3.17 Lema. Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que exista o racional $\dfrac{p}{q}$ tal que p e q sejam primos entre si e $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$. Daí, temos que $p^2 = 2q^2$ e, portanto, p^2 é par, o que implica que p também é. Logo, existe um inteiro k tal que $p = 2k$. Temos assim $2q^2 = p^2 = 4k^2$ e, portanto, $q^2 = 2k^2$. Daí concluímos que q^2 é par e, logo, q também é. Provamos que tanto p quanto q são pares, contradizendo o fato, que eles não possuem divisor comum.

Quando se tem um quadrado de lado medido 1, pelo teorema de Pitágoras a medida d de sua diagonal, ao quadrado, é $1^2 + 1^2$, donde escrevemos $d^2 = 2$, e então a medida d é $\sqrt{2}$, um número não racional. Temos a seguinte definição.

3.18 Definição (Números Irracionais)**.** Os números de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ que não são racionais são denominados de *irracionais*. Designaremos por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais.

Parece que o primeiro número irracional descoberto foi o $\sqrt{2}$. Em geral é difícil saber se um dado número é irracional ou não, como é o caso do número π. Mas alguns são fáceis de demonstrar, como na proposição abaixo.

3.19 Proposição.

(i) Se $p > 1$ é um inteiro primo, então $\sqrt{p}$ é irracional;

(ii) Se $p_1, \ldots, p_n$ são inteiros primos distintos, então $\sqrt{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}$ é irracional;

(iii) A soma (ou diferença) entre um número racional e um número irracional é irracional;

(iv) O produto entre um número irracional e um número racional diferente de zero é irracional.

Cuidado! A soma entre dois números irracionais não é necessariamente um irracional. De fato, os número $a = 1 - \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}$ são irracionais, no entanto $a + b = 1$ é racional.

3.1.4 O Conjunto dos Números Reais

Podemos definir número real do seguinte modo:

3.20 Definição (Número Real)**.** *Número Real* é todo número que é racional ou irracional. A totalidade dos números racionais, juntamente com os irracionais, é o conjunto $\mathbb{R}$ dos *números reais*.

Observe que os números naturais e os números inteiros são casos particulares de números racionais, de forma que, quando dizemos que um número é racional, fica aberta a possibilidade dele ser um número inteiro ou simplesmente um natural.

3.21 Definição (Corpo Ordenado Completo)**.** Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ chama-se *completo* quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{K}$, possui supremo em $\mathbb{K}$.

Da definição que acabamos de enunciar segue, imediatamente, que num corpo ordenado completo todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset \mathbb{K}$, possui ínfimo em $\mathbb{K}$.

Prova-se também que todo corpo ordenado completo é arquimediano. A seguir, o axioma fundamental da Análise.

Axioma 2. Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado o corpo dos números reais.

Em todo o restante deste material as únicas propriedades dos números reais que usaremos são aquelas que decorrem de ser $\mathbb{R}$ um corpo ordenado completo. Isto inclui, evidentemente, todas as proposições enunciadas até aqui sobre corpos e corpos ordenados.

Veremos, agora, que os números irracionais se acham espalhados por toda parte entre os números reais. Em seguida, veremos que há mais números irracionais do que racionais. Para entendermos o significado de "espalhados por toda parte", considere a seguinte definição.

3.22 Definição (Conjunto Denso)**.** Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se *denso* em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a, b) contém algum ponto de X. Em outras palavras, diremos que o conjunto X de números reais é denso em $\mathbb{R}$ quando, dados arbitrariamente $a < b$ em $\mathbb{R}$, for possível encontrar $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Exemplo 3.6. Seja $X = \complement\mathbb{Z}$ o conjunto dos números reais que não são inteiros é denso em $\mathbb{R}$, pois todo intervalo (a, b) é um conjunto infinito, enquanto existe no máximo um número finito de inteiros n tais que $a < n < b$. Logo, qualquer intervalo (a, b) contém elementos de X.

3.23 Teorema. O conjunto $\mathbb{Q}$ e o conjunto $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$.

O teorema abaixo, às vezes chamado "Princípio dos Intervalos Encaixados", é usado por alguns autores na definição dos números reais.

3.24 Teorema (dos Intervalos Encaixantes)**.** Seja $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ uma sequencia decrescente de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$. A interseção $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia. Isto é, existe pelo menos um número real x tal que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, temos $\bigcap I_n = [a, b]$, onde $a = \sup a_n$ e $b = \inf b_n$.

Prova: De $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ obtemos que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Seja $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$. A é limitado, a_1 é uma cota inferior e cada b_n é uma cota superior de A. Analogamente, B é também limitado. Sejam $a = \sup A$ e $b = \inf B$. Como cada b_n é cota superior de A, temos $a \leq b_n$ para cada n. Assim, a é cota inferior de B e, portanto, $a \leq b$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a \leq b \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluímos que a e b pertencem a todos intervalos I_n, donde $[a, b] \subset I_n$, para cada n. Logo $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Nenhum $x < a$ e $y > b$ pode pertencer a todos os I_n. De fato, sendo $x < a = \sup A$, existe algum $a_n \in A$ tal que $x < a_n$, ou seja, $x \notin I_n$. Do mesmo modo, $y > b$ implica $y > b_m$, para algum m, donde $y \notin I_m$. Concluímos então que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$.

Já vimos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Vamos mostrar agora que na verdade "existem mais números irracionais do que racionais". Mais precisamente na próxima proposição mostraremos que $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{R}$. Como consequência, obtemos $\#\mathbb{Q} < \#(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. De fato, se fosse $\#(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \leq \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$, então, como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, teríamos $\#\mathbb{R} \leq \#\mathbb{N}$, impossível!

3.25 Teorema. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável, ou seja, $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$.

Prova: Devemos mostrar que não existe função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ ou, de maneira equivalente, que qualquer função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva.

Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e seja $I_1 = [a_1, d_1]$ um intervalo fechado tal que $\varphi(1) \notin I_1$. Dividimos este intervalo em três partes, da seguinte maneira: tomamos $b_1, c_1 \in I_1$ tais que $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$ e assim obtemos $I_1 = [a_1, b_1] \cup [b_1, c_1] \cup [c_1, d_1]$. Certamente $\varphi(2)$ não pertence a algum destes três intervalos que denotaremos I_2. Repetimos o processo com o intervalo I_2: o dividimos em três partes e definimos I_3 como sendo uma destas partes tal que $\varphi(3) \notin I_3$. Continuando indefinidamente este processo, construímos uma família $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos fechados tais que $I_n \supset I_{n+1}$ e $\varphi(n) \notin I_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema anterior existe s tal que $s \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue imediatamente que $s \neq \varphi(n)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e portanto φ não é sobrejetiva.

3.26 Corolário. Todo intervalo não-degenerado de números reais é não enumerável.

3.27 Corolário. O conjunto dos números irracionais não é enumerável.

3.2 Noções Topológicas da Reta

A Topologia é o ramo da Matemática que trata das questões de limite (e/ou proximidade). A *Topologia da Reta*, isto é, a *Topologia de* $\mathbb{R}$, é bem simples, para não dizer pobre. Nela, os abstratos conceitos da Topologia Geral ganham formas mais concretas e compreensíveis. Poderíamos usar estas formas simplificadas em nossa exposição, porém, preferimos argumentos mais gerais para facilitar a (futura) passagem do leitor ao estudo da Topologia em contextos mais gerais. Mesmo que o leitor não venha a se especializar em Topologia, para se aprofundar em Análise ou Geometria serão necessários outros conhecimentos que ultrapassam os da Topologia da Reta.

3.2.1 Conjuntos Abertos

3.28 Definição. Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in X$ chama-se *ponto interior* de X quando existe um intervalo aberto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset X$

3.29 Definição. Dados $X \subset \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in X$ que são interiores a X será representado por $\operatorname{int} X$. Quando $a \in \operatorname{int} X$ diz-se que o conjunto X é uma vizinhança do ponto a.

É fácil ver que na definição anterior podemos substituir, sem perda de generalidade, o intervalo aberto arbitrário por um intervalo da forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$. Ou, em outros termos, $x \in \operatorname{int} X$ se, e somente se,

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } |y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in X.$$

Atenção!

(i) Temos sempre que $\operatorname{int} X \subset X$. Porém a inclusão inversa não é necessariamente verdadeira. Tomemos, por exemplo, $X = [0, 1]$. Temos que $1 \notin \operatorname{int} X$ pois todo intervalo aberto que contém 1 tem elementos maiores do que 1 e portanto não está contido em X.

(ii) Se $X \subset Y$ então $\operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y$.

É trivial que todo ponto de um intervalo aberto pertence ao interior do intervalo. Ou seja, se X é um intervalo aberto e não vazio, então $\operatorname{int} X = X$. De maneira geral, temos a seguinte definição.

3.30 Definição. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se um *conjunto aberto* quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando $\operatorname{int} A = A$.

Conforme esta definição, temos que X é aberto se, e somente se,

$$\forall\ x \in X,\ \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } |y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in X.$$

Para um conjunto ser aberto precisa necessariamente ser um intervalo. Conjuntos que não possuem intervalos não podem ter conjuntos abertos. Todo conjunto aberto é não-enumerável.

Exemplo 3.7. Os conjuntos $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ não possuem pontos interiores, ou seja, $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \operatorname{int} \mathbb{Z} = \operatorname{int} \mathbb{N} = \varnothing$. Portanto, não possuem intervalos e nem conjuntos abertos.

Atenção! O conjunto vazio é aberto. De fato, negar esta afirmação significa admitir que $\operatorname{int} \varnothing \subsetneq \varnothing$ e, em particular, admitir que existe $x \in \varnothing$.

Exemplo 3.8. O intervalo (a, b) é aberto, pois todo ponto c deste intervalo (a, b) é um ponto interior.

3.31 Teorema.

(i) Se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ são abertos, então $A \cap B$ é aberto;

(ii) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}$. A reunião

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$$

é um conjunto aberto.

Prova:

(i) Seja $x \in A \cap B$. Então $x \in A$ e $x \in B$ e portanto existe $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset B$. Seja ε o menor dos positivos entre ε_1 e ε_2. Então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset B$ e daí $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A \cap B$. Assim, todo ponto $x \in A \cap B$ é interior a $A \cap B$, logo $A \cap B = \operatorname{int}(A \cap B)$. Concluímos então que $A \cap B$ é um conjunto aberto.

(ii) Seja $x \in A = \cup A_\lambda$, então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda$. Como $A_\lambda \subset A$, temos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Assim, todo ponto x de A é um ponto interior, logo A é um conjunto aberto.

3.32 Corolário. Interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Atenção! A interseção infinita de abertos não é um aberto. De fato, $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, implica $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$, que não é aberto.

Pratique! Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$ tem-se $\operatorname{int}(\operatorname{int} X) = \operatorname{int} X$ e conclua que $\operatorname{int} X$ é um conjunto aberto.

Prove que $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ e $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ quaisquer que sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se $A = (0, 1]$ e $B = [1, 2)$, mostre que $\operatorname{int}(A \cup B) \neq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

Exemplo 3.9. Seja $B \subset \mathbb{R}$ aberto. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, o conjunto $x + B = \{x + y, y \in B\}$ é aberto. Analogamente, se $x \neq 0$, então o conjunto $x \cdot B = \{xy, y \in B\}$ é aberto.

Nota 10. Para todo X vale a reunião disjunta $\mathbb{R} = \operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(\mathbb{R} - X) \cup \mathcal{F}$ em que $\mathcal{F}$ é formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de $\mathbb{X}$ e de $\mathbb{R} - \mathbb{X}$. O conjunto $\mathcal{F}$ chama-se fronteira de X, que denotamos também por ∂X.

3.2.2 Conjuntos Fechados

3.33 Definição. Diz-se que um ponto a é *aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$.

Evidentemente, todo ponto a de X é aderente a X, basta tomar $x_n = a$.

3.34 Definição. Chama-se *fecho* de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X.

Note que:
- $\diamond$ $X \subset \overline{X}$;
- $\diamond$ Se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

3.35 Definição. Um conjunto X diz-se *fechado* quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X.

Exemplo 3.10. Os conjuntos $[2, 5]$ e $[-3, 1]$ são fechados.

Exemplo 3.11. O conjunto vazio é fechado. De fato, negar esta afirmação significa admitir que $\varnothing \subsetneq \overline{\varnothing}$ e, em particular, admitir que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \varnothing$.

3.36 Teorema. Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.

Prova: Seja a aderente a X. Então $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma vizinhança qualquer V de a temos que $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande, logo $V \cap X \neq \varnothing$.

Reciprocamente, se toda vizinhança de a contém pontos de X, podemos escolher em cada intervalo $\left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ um ponto $x_n \in X$. Então $|\, x_n - a \,| < \dfrac{1}{n}$, logo $\lim x_n = a$ e a é aderente a X.

3.37 Corolário. O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado, ou seja, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$.

Com efeito, se a é aderente a $\overline{X}$ então todo conjunto aberto A contendo a, contém algum ponto $b \in \overline{X}$. A é uma vizinhança de b, como b é aderente a X segue-se que A contém algum ponto de X. Logo, qualquer ponto a, aderente a $\overline{X}$, é também aderente a X, isto é, $a \in \overline{X}$.

Exemplo 3.12. Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado, não vazio. Então $a = \inf X$ e $b = \sup X$ são aderentes a X. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in X$ com $a \leq x_n < a + \dfrac{1}{n}$, logo $a = \lim x_n$. Analogamente, vê-se que $b = \lim y_n$, $y_n \in X$. Em particular, a e b são aderentes a (a, b).

Exemplo 3.13. O fecho dos intervalos (a, b), $[a, b)$ e $(a, b]$ é o intervalo $[a, b]$.

Exemplo 3.14. Os conjuntos $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ e $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ são conjuntos fechados.

Nota 11. Particularmente, temos que se $a = b$ que dá $[a, a] = \{a\}$ temos um conjunto fechado.

3.38 Teorema. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.

Prova: Seja F fechado e $a \in A$, isto é, $a \notin F$. Como F é fechado existe alguma vizinhança V_a de a que não contém pontos de F, isto é $V_a \subset A$. Assim, todo ponto $a \in A$ é interior a A, ou seja, A é aberto.

Reciprocamente, se o conjunto A é aberto e o ponto a é aderente a $F = \mathbb{R} - A$ então toda vizinhança de a contém pontos de F; logo, a não é interior a A. Sendo A um conjunto aberto e $a \notin A$ temos que $a \in F$. Assim, todo ponto a aderente a F pertence a F, logo F é fechado.

3.39 Teorema.

(i) Se F_1 e F_2 são fechados então $F_1 \cup F_2$ é fechado;

(ii) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos fechados, então a intersecção

$$F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$$

é um conjunto fechado.

Prova:

(i) Os conjuntos $A_1 = \mathbb{R} - F_1$ e $A_2 = \mathbb{R} - F_2$ são abertos. Logo, temos que $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2)$ é aberto, pois é intersecção finita de abertos. E assim, como o complementar de $F_1 \cup F_2$ é aberto, este conjunto é fechado.

(ii) Para cada $\lambda \in L$, o conjunto $A_\lambda = \mathbb{R} - F_\lambda$ é aberto. Temos que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. Mas $A = \mathbb{R} - F$. Logo, F é fechado.

Exemplo 3.15. Todo conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é fechado.

Exemplo 3.16. $\mathbb{Z}$ é um conjunto fechado.

Exemplo 3.17. Existem conjuntos que não são fechados nem abertos, como $[a, b)$ e $(a, b]$.

Exemplo 3.18. Os conjuntos $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são abertos e fechados ao mesmo tempo.

Pratique! Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \cup \partial X$. Conclua que X é fechado se, e somente se, $X \supset \partial X$.

3.2.3 Pontos de Acumulação

3.40 Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que a é um *ponto de acumulação* de X quando todo intervalo aberto de centro a, isto é, todo intervalo da forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, contém uma infinidade de pontos de X.

Em particular, se X tem ponto de acumulação, então X é infinito, ou seja, conjuntos finitos não possuem pontos de acumulação.

Notação: Indica-se por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X.

3.41 Teorema. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. São equivalentes:

(i) a é ponto de acumulação de X;

(ii) $a = \lim x_n;\ x_n \in X - \{a\}$.

Exemplo 3.19. $X = \left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow X' = \{0\}$

3.42 Definição. Um ponto $a \in X$ que não é ponto de acumulação de X, é um ponto isolado de X, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{a\}$.

3.43 Definição. Um conjunto X, no qual todos os seus pontos são isolados, é chamado de *conjunto discreto*.

Exemplo 3.20. Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são discretos.

3.2.4 Conjuntos Compactos

3.44 Definição (Cobertura)**.** Uma *cobertura* de um conjunto X é uma família $\mathcal{C}$ de conjuntos C_λ tais que

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda.$$

Quando todos os conjuntos C_λ são abertos, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma *cobertura aberta*. Quando $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ é um conjunto finito, diz-se que $C_{\lambda_1} \cup \ldots \cup C_{\lambda_n}$ é uma *cobertura finita*. Se $L' \subset L$ é tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$, diz-se que $\mathcal{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$ é uma subcobertura de $\mathcal{C}$.

Exemplo 3.21.

(a) Os intervalos $C_1 = \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $C_2 = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e $C_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right)$ constituem uma cobertura aberta para o intervalo $X = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, com $L = \{1, 2, 3\}$, pois $X = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (0, 1)$. Tomando $L' = \{1, 2\}$, temos a subcobertura $\mathcal{C}' = \{C_1, C_2\}$ para X, pois $X = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset C_1 \cup C_2 = (0, 1)$.

(b) Como $(0, 1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n}, 1\right)$, então $\mathcal{C} = \left\{\left(\dfrac{1}{n}, 1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1)$.

(c) Se para $x \in \mathbb{R}$, temos $C_x = (x - 1, x + 1)$, então $\mathcal{C} = \{C_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$.

3.45 Teorema (Borel-Lebesgue)**.** Toda cobertura aberta de um conjunto limitado e fechado possui uma subcobertura finita.

Prova: Ver (por exemplo) [2], página 54.

Exemplo 3.22.

(a) A reta $\mathbb{R}$, sendo um conjunto fechado, mas ilimitado, possui cobertura aberta $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, a qual não admite subcobertura finita. De fato, a reunião de um número finito de intervalos $(-n, n)$ é igual ao maior deles e, portanto, não pode ser $\mathbb{R}$.

(b) O intervalo $(0, 1]$, sendo um conjunto limitado, mas não fechado, possui a cobertura aberta $\left\{\left(\dfrac{1}{n}, 2\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, da qual não se pode extrair uma subcobertura finita porque areunião de um número finito de intervalos da forma $\left(\dfrac{1}{n}, 2\right)$ é o maior deles e, portanto, não pode conter $(0, 1]$.

3.46 Teorema. As seguintes afirmações a respeito de um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

(1) K é limitado e fechado;

(2) Toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita;

(3) Todo subconjunto infinito de K possui ponto de acumulação pertencente a K;

(4) Toda sequência de pontos de K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

Prova: Ver (por exemplo) [3], página 144.

3.47 Corolário (Bolzano-Weierstrass)**.** Todo conjunto infinito limitado $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação.

3.48 Definição (Conjunto Compacto)**.** Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ que cumpre umas das (e portanto todas as) condições do Teorema 3.46 é dito *compacto*.

Note que! Para mostrar que um determinado conjunto é compacto precisamos provar que para toda cobertura aberta existe subcobertura finita. Para mostar que não é compacto basta achar uma cobertura que não possui subcobertura finita.

Exemplo 3.23.

(a) O conjunto $(0,1)$ não é compacto. De fato, $(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n},1\right)$, mas se existisse $\{C_{n_1},\ldots,C_{n_p}\}$ tal que $(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{p}\left(\dfrac{1}{n_i},1\right)$, então $(0,1) \subset \left(\dfrac{1}{M},1\right)$, em que $M = \max\{n_1,\ldots,n_p\} > 0$, um absurdo.

(b) Seja $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito em $\mathbb{R}$ e seus pontos todos isolados (i.é., K é discreto) e seja $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda\in L}$ uma cobertura aberta de K. Para $i = 1,2,\ldots,n$, seja $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $x_i \in C_i$ (tal conjunto sempre existe, pois $\mathcal{C}$ é uma cobertura de K). Então $C_1,\ldots,C_n$ geram uma subcobertura finita para K. Logo K é compacto e, concluímos que todo subconjunto finito é compacto;

família de intervalos abertos C_{x_i}, de centro x_i, tal que $C_{x_i} \cap K = \{x_i\}$. Esta família é uma cobertura aberta de K, pois casa $x_i \in K$ pertence a C_{x_i}. Assim K é compacto, e concluímos que todo conjunto finito é compacto;

(c) Para $a < b$, os conjuntos (a,b), $(a,b]$ e $[a,b)$ não compactos por não serem fechados. Além dos conjuntos $(-\infty,c]$ e $[c,+\infty)$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Precisamente, todo conjunto $[a,b]$ é compacto;

(d) O conjunto $\mathbb{Z}$ não é compacto, embora seja fechado, pois é ilimitado;

(e) O conjunto $\mathbb{R}$ não é compacto, conforme exemplo 3.22 (a), ou também por não ser limitado.

Nota 12. Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, então $a = \inf X$ e $b = \sup X$ pertencem a X. Assim, todo conjunto compacto possui um elemento máximo e um elemento mínimo.

Exemplo 3.24 (O conjunto de Cantor)**.** Este conjunto possui as seguintes propriedades:

1. É compacto;
2. Tem interior vazio (não contém intervalos);
3. Não contém pontos isolados (todos seus pontos são pontos de acumulação);
4. É não-enumerável.

... detalhes (por exemplo) [2], página 55.

3.2.5 Conjuntos Densos

3.49 Definição. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ com $A \subset B$. Dizemos que A é *denso* em B se $B \subset \overline{A}$.

Em outros termos, se $A \subset B$, então A é denso em B se, e somente se, para todo $x \in B$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$.

A próxima proposição nos fornece uma condição necessária e suficiente para a densidade.

3.50 Proposição. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Temos que A é denso em B se, e somente se, todo intervalo aberto que contém algum ponto de B também contém algum ponto de A.

Exemplo 3.25. $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostremos que $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$. Se $0 \in (a, b)$, então não há mais nada a ser demonstrado. Se $0 \notin (a, b)$, então $0 \leq a$ ou $b \leq 0$. Consideremos o caso $a \geq 0$ (o caso $b \leq 0$ é análogo). Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < a$. Seja $m \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que $m - 1 < n \cdot a$, ou seja, $m \in \mathbb{N}$ satisfaz

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m}{n}.$$

Para concluir que $\dfrac{m}{n} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$ basta mostrar que $\dfrac{m}{n} < b$. Suponhamos, por absurdo, que $\dfrac{m}{n} > b$. Neste caso,

$$\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n} \Rightarrow b - a < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} \Rightarrow b - a < \frac{1}{n},$$

contradizendo $n > \dfrac{1}{b-a}$.

Pratique!

Seja $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$. Determine: (a) $\overline{A}$; (b) int A; (c) $\overline{A}^{\complement}$; (d) $\text{int}(A^{\complement})$.
Dê um exemplo de família de abertos cuja interseção não é aberta.
Dê um exemplo de família de fechados cuja união não é fechada.

Capítulo 4

Sequências e Séries

Apresentação

Estudaremos os limites de sequência dos números reais e, em particular, trataremos das séries (ou "somas infinitas").

Todos os conceitos e resultados importantes da Análise Matemática se referem, quer explícita quer implicitamente, a limites. Daí o papel central que esta noção desempenha.

Os limites de sequências de números reais são os mais simples, por isso começaremos por eles. Outros limites mias sofisticados, como por exemplo, derivadas e integrais, serão estudados posteriormente. Do ponto de vista intuitivo, sugerimos que pense uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de números reais como uma sequência de pontos da reta e no seu limite, que definiremos a seguir, como um ponto do qual os pontos x_n tornam-se arbitrariamente próximos, desde que se tome o índice n suficientemente grande. Um resultado crucial para justificar essa imagem geométrica é:

> Dados o números reais a, x, ε, com $\varepsilon > 0$, as três afirmações seguintes são equivalentes:
>
> $|x - a| < \varepsilon, \qquad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, \qquad x$ pertence ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Assim, o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, que chamaremos o *intervalo aberto de centro a e raio* ε, é formado pelos pontos cuja distância ao ponto a é menor do que ε. Analogamente, os pontos x do intervalo $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ são caracterizados pela propriedade de estarem situados a uma distância menor do que ou igual a ε do centro a, ou seja, $|x - a| \leq \varepsilon$.

Outra consideração importante que fazemos: quando $X \subset \mathbb{N}$ é um conjunto infinito, costuma-se dizer que X contém números naturais "arbitrariamente grandes". Isto quer dizer que, dado qualquer $n_1 \in \mathbb{N}$, existe $n \in X$ tal que $n > n_1$. Em particular, se existir um número $n_o \in \mathbb{N}$ tal que X contém todos os números naturais $n > n_0$, então X é infinito.

4.1 Sequências e Subsequências

4.1 Definição. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ para a qual denotamos o valor de x em n por x_n em vez de $x(n)$.

Geralmente usamos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para representar uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Às vezes a notaremos também por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Dizemos que x_n é o *termo de ordem n* ou que x_n é o *n-ésimo termo* da sequência.

Quando quisermos explicitar que a imagem da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em $A \subset \mathbb{R}$ escreveremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$.

Como sequências são funções, as definições de função limitada, crescente, decrescente, monótona, etc. também fazem sentido para sequências.

Exemplo 4.1. Seja $a \in \mathbb{R}$ e tomemos $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante. É imediato que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Exemplo 4.2. A sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ é limitada mas não é monótona.

Exemplo 4.3. Sejam $a, r \in \mathbb{R}$. Considere $x_1 = a, x_2 = a + r, x_3 = a + 2r$, de maneira geral, $x_n = a + (n - 1)r$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *Progressão Aritmética* de primeiro termo a e razão r. Se $r = 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante e, portanto, limitada. Se $r > 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e, portanto, limitada inferiormente. Finalmente, se $r < 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e, portanto, limitada superiormente.

4.2 Definição. Dizemos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma *subsequência* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ crescente tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.4. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a Progressão Aritmética de termo inicial a e razão r. A Progressão Aritmética $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, tomando $n_k = 2k - 1$, $(k \in \mathbb{N})$ obtemos

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r = a + (2k - 2)r = a + (k - 1)(2r) = y_k.$$

4.2 Sequências Convergentes

Intuitivamente, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para x se seus termos se aproximam de x quando n é arbitrariamente grande. Esta idéia não está de todo errada. Porém, ela pode induzir a uma idéia equivocada de convergência. Somos tentados a dizer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x quando a distância entre x_n e x diminui à medida que n cresce, ou seja, a função $f(n) = |x_n - x|$ é decrescente. Não é bem assim. Ela foge um pouco do assunto "sequências de números reais" mas ilustra bem o que queremos dizer por "se aproximar".

4.3 Definição. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita *convergente* se existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \ \Rightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $x_n \to x$ e dizemos que x é *limite* da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que x_n *converge para* (ou *tende a*) x quando n tende a mais infinito ($n \to +\infty$). Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente, então dizemos que ela é *divergente*.

Exemplo 4.5. Seja $x \in \mathbb{R}$ e considere a sequência dada por $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $x_n \to x$. De fato, $|x_n - x| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, podemos escrever

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ n \geq 1 \ \Rightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon.$$

Exemplo 4.6. Considere a sequência $x_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $x_n \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Temos então $0 < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Mas se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq N$, então $x_n = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} = x_N$. Logo, podemos escrever

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n \geq N \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon.$$

Talvez você conheça a notação $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ para $x_n \to x$. Vamos refletir sobre ela. Por enquanto, façamos de conta que não conhecemos a definição de limite. Suponhamos que ao abrir um livro de Análise, pela primeira vez, encontremos as seguintes inscrições:

$$x_n \to 0 \ \text{ e } \ x_n \to 1.$$

Não ficaríamos chocados. Porém, se estivesse escrito

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 1,$$

seríamos levados a concluir que $0 = 1$. Ora, é o sinal de igual "$=$" que nos leva a esta confusão. Se não tivermos a unicidade do limite, então a notação $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ é fortemente enganosa.

A próxima proposição nos dará direito ao uso da notação $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

4.4 Proposição. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência e $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \to x$ e $x_n \to y$. Então $x = y$.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $x \neq y$. Seja $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2} > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Também temos $x_n \to y$. Logo, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N' \Rightarrow |x_n - y| < \varepsilon.$$

Seja n o maior dos números N e N'. Para tal n as duas conclusões anteriores são válidas. Temos então

$$|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x - y|.$$

Concluímos que $|x - y| < |x - y|$, o que é absurdo.

4.5 Proposição. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a x se, e somente se, toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a x.

Prova: Suponhamos que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$. Seja $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, $y_k = x_{n_k} (\forall\, k \in \mathbb{N})$ para alguma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ crescente. Mostremos que $y_k \to x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$. Como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ é crescente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq K$, então $n_k \geq N$. Segue que

$$k \geq K \Rightarrow |y_k - x| < \varepsilon.$$

Portanto $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x. A recíproca é imediata (basta observar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de si mesma).

Exemplo 4.7. A sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ é divergente. De fato, se ela fosse convergente, então pela proposição anterior todas as suas subsequências seriam convergentes para o mesmo limite. Porém, $(1, 1, 1, \ldots)$ e $(0, 0, 0, \ldots)$ são duas de suas subsequências sendo que a primeira converge para 1 enquanto que a segunda converge para 0.

Como corolário da proposição anterior, obtemos que se x_n tende a x, então x_{n+2007} tende a x. Não há nada de especial com o número 2.007. Mais geralmente, fixado $p \in \mathbb{N}$, temos que se x_n tende a x, então x_{n+p} tende a x. É fácil perceber que a recíproca também é verdadeira, ou seja, se para algum $p \in \mathbb{N}$ temos que x_{n+p} tende a x, então é porque x_n tende a x. Verifique! A importância deste fato é a seguinte. Se conhecermos alguma propriedade que garanta a convergência de uma sequência e soubermos que tal propriedade só é valida a partir do seu p-ésimo termo então, ainda sim, podemos concluir que a sequência é convergente. Vejamos um exemplo esclarecedor.

Exemplo 4.8. Sabemos que sequências constantes são convergentes. Considere a sequência (não constante) dada por $x_n = \left\lfloor \dfrac{1000}{n} \right\rfloor$, sendo $\lfloor x \rfloor$ a função *Parte Inteira* de x, definida abaixo:

$$\lfloor x \rfloor = m \quad \text{se} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad m \leq x < m + 1.$$

É fácil ver que $x_n = 0$ para todo $n > 1000$. Ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante a partir do seu milésimo-primeiro termo. Concluímos que ela é convergente.

4.6 Teorema. Toda sequência convergente é limitada.

Prova: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in \mathbb{R}$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de sequência convergente, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então

$$|x_n - x| < 1, \quad \text{isto é} \quad , x_n \in (x - 1, x + 1).$$

Tomando

$$a = \min\{x_1, \ldots, x_N, x - 1\} \quad \text{e} \quad b = \max\{x_1, \ldots, x_N, x + 1\}$$

temos imediatamente que $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

4.3 Sequencias Monótonas e Sequencias Limitadas.

A recíproca do Teorema 4.6 é falsa como mostra o Exemplo 4.7. Porém, existem algumas recíprocas parciais que veremos nesta seção.

4.7 Proposição. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente, então $x_n \to \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Da mesma forma, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente, então $x_n \to \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Prova: Vamos provar apenas a primeira parte da proposição já que a segunda se demonstra de modo análogo. Seja $s = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_N \leq s$. Logo, para $n \geq N$, temos $x - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq s$. Concluímos daí que $|x_n - s| < \varepsilon$.

4.8 Teorema (Bolzano-Weierstrass)**.** Toda sequência limitada possui subsequência convergente.

Prova: Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Considere o seguinte conjunto:

$$N = \{n \in \mathbb{N}; x_n > x_m, \forall m > n\}.$$

Existem duas possibilidades: N é infinito ou N é finito.

1º caso: N é infinito.

Escrevamos $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ com $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Assim, se $i < j$ então $n_i < n_j$ e, como $n_i \in N$, obtemos que $x_{n_i} > x_{n_j}$. Concluímos que a subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Sendo ela limitada obtemos, finalmente, que ela é convergente.

2º caso: N é finito. Como N é finito, existe $n_1 \in \mathbb{N} - N$ cota superior de N. Ora, $n_1 \notin N$ logo, existe $n_2 > n_1$ (e portanto $n_2 \notin N$) tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$. Mas de $n_2 \notin N$ segue que existe $n_3 > n_2$ (e portanto $n_3 \notin N$) tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Por indução, definimos uma subsequência $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ que é crescente e, portanto, convergente (pois ela é limitada).

4.4 Sequências de Cauchy

4.9 Definição. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita de Cauchy se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \ \text{tal que}\ \ n, m \geq N \ \ \Rightarrow\ \ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Uma sequência é de Cauchy se seus termos se aproximam uns dos outros. Repare que não apenas termos consecutivos mas sim todos eles. É natural acreditar que qualquer sequência convergente é de Cauchy e vice-versa. Vamos admitir, por hora, que sequências convergentes são de Cauchy (este fato será demonstrado a seguir). Façamos alguns comentários sobre a recíproca.

Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionais convergente para, por exemplo, $\sqrt{2}$? (existe tal sequência?). Sendo convergente ela é de Cauchy. Como a definição de sequência de Cauchy não faz menção ao limite, mesmo se só conhecêssemos números racionais ainda estaríamos de acordo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Porém, neste caso, não seríamos capazes de mostrar a existência do limite. Ou seja, se considerássemos apenas números racionais, não seria possível mostrar que toda sequência de Cauchy é convergente.

Já que sequências de Cauchy são convergentes em $\mathbb{R}$ mas não em $\mathbb{Q}$, isto deve estar relacionado à "completeza". De fato, alguns autores usam sequências de Cauchy de números racionais para construir $\mathbb{R}$. A vantagem desta construção é que ela pode ser empregada para "completar" outros conjuntos (ou melhor, espaços métricos) que não sejam corpos ordenados.

4.10 Teorema. Uma sequência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy.

Prova: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para o limite x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Portanto, se $m, n \geq N$ temos

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Então, $\forall\varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$. Daí, $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$, logo $x_n \in [x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon]$. Tomando $a = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_m - \varepsilon\}$ e $b = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_m + \varepsilon\}$. Logo, $x_n \in [a, b]$, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência $(x_{nk})_{kin\mathbb{N}}$ convergente para o limite x.

Mostremos que $x_n \to x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Como $x_{n_k} \to x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ e $|x_{n_k} - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Daí e de (4.1) segue que, se $n \geq N$, então

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{nk}| + |x_{nk} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.5 Limites Infinitos

Existem sequências divergentes que possuem limite! Isto é apenas um jogo de palavras. A definição seguinte diz que certas sequências têm limites que não são números reais. Não diremos que tais sequências são convergentes.

4.11 Definição. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que x_n tende a *mais infinito* quando n tende a *mais infinito* ou que *mais infinito* é limite da sequência e escrevemos $x_n \to +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ se,

$$\forall\, M \in \mathbb{R}, \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n \geq N \ \Rightarrow \ x_n > M.$$

4.12 Definição. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que x_n tende a *menos infinito* quando n tende a mais infinito ou que *menos infinito* é limite da sequência e escrevemos $x_n \to \infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ se,

$$\forall\, M \in \mathbb{R}, \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n \geq N \ \Rightarrow \ x_n < M.$$

Insistimos no fato que se $x_n \to +\infty$ ou $x_n \to -\infty$, então não podemos dizer que a sequência é convergente. Uma sequência é dita convergente exclusivamente quando satisfaz a condição da Definição 4.3. Além disto, se $x_n \to +\infty$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente e, portanto, é divergente. Da mesma forma, se $x_n \to -\infty$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente e, portanto, é divergente.

Nota 13. Com estas convenções sobre uso dos termos "sequência convergente"e de "limite de sequência"a Proposição 4.11 também é válida (obviamente com outra demonstração) se substituirmos x por $+\infty$ ou por $-\infty$. Como $x_n > M$ é equivalente $a - x_n < -M$, temos que $x_n \to +\infty$ se, e somente se, $-x_n \to -\infty$. Portanto toda afirmação sobre limite mais infinito tem uma análoga para limite menos infinito.

4.6 Operações com Limites

Temos a seguir algumas propriedades aritméticas de limites finitos.

4.13 Proposição. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes para x e y, respectivamente, e $c \in \mathbb{R}$. Temos:

(i) $x_n + y_n \to x + y$;

(ii) $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$;

(iii) $c \cdot x_n \to c \cdot x$;

(iv) se $y \neq 0$, então $y_n^{-1} \to y^{-1}$.

Prova:

(i) Seja $\varepsilon > 0$. Graças às convergências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existem N' e N'' tais que, se $n \geq N'$, então $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, e se $n \geq N''$, então $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $N = \max N', N''$. Assim, se $n \geq N$, então $n \geq N'$ e $n \geq N''$ e, daí,

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mostramos assim que $x_n + y_n \to x + y$.

(ii) Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, ela é limitada. Logo, existe $C > 0$ tal que $|x_n| < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|y_n - y| < \varepsilon$. Desta forma, para $n \geq N$, temos

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x \cdot y| &\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| = |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| \\ &\leq C \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| < (C + |y|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra que $x_n \cdot y_n$ converge para $x \cdot y$.

(iii) É consequência do item anterior, tomando $y_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Seja $\varepsilon > 0$ e $N' \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N'$, então $|y_n - y| < \varepsilon$. Temos ainda que $y \neq 0$, consequentemente, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que, $|y_n| > \frac{|y|}{2}$, isto é, $|y_n|^{-1} < 2|y|^{-1}$, quando $n \geq N''$. Tomando $N = \max\{N', N''\}$, para todo $n \geq N$, temos que

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} < \frac{2}{|y|^2}\varepsilon$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 4.9. Seja $r \in \mathbb{R}$. A sequência $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma Progressão Geométrica de razão r.

◇ Se $|r| < 1$, então multiplicando por $|r^n| \geq 0$, obtemos $0 \leq |r^{n+1}| \leq |r^n|$. Logo, $(|r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, limitada inferiormente e, portanto, convergente para, digamos, L. Ora, $|r^{n+1}| = |r| \cdot |r^n|$, então, passando o limite, obtemos $L = |r| \cdot L$. Como $|r| \neq 1$, temos $L = 0$. Segue, finalmente, que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.

◇ Se $|r| > 1$, então $|r| = 1 + h$ com $h > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, $|r^n| = |r|^n \geq 1 + nh$ e, portanto, $|r^n| \to +\infty$. Em particular, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente.

◇ Deixamos como exercício o estudo dos casos $r = 1$ e $r = -1$.

Vejamos agora as propriedades "aritméticas" de limites infinitos.

4.14 Proposição. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências e $c > 0$. Suponhamos que $x_n \to +\infty$. Temos:

(i) se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então $x_n + y_n \to +\infty$;

(ii) se $y_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x_n \cdot y_n \to +\infty$;

(iii) $c \cdot x_n \to +\infty$;

(iv) $x_n^{-1} \to 0$.

Prova:

(i) Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $M \in \mathbb{R}$, como $x_n \to +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > M - a$. Segue que se $n \geq N$, então $x_n + y_n \geq x_n + a > M$. Concluímos que $x_n + y_n \to +\infty$.

(ii) Dado $M \in \mathbb{R}$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > \dfrac{|M|}{c}$. Desta forma, se $n \geq N$, então $x_n \cdot y_n \geq x_n \cdot c > |M| \geq M$. Portanto $x_n \cdot y_n \to +\infty$.

(iii) É consequência do item anterior, tomando $y_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > \varepsilon^{-1}$. Segue que se $n \geq N$, então $|x_n^{-1} - 0| = x_n^{-1} < \varepsilon$. Concluímos que $x_n^{-1} \to 0$.

4.7 Limite Superior e Limite Inferior

No estudo de limites de subsequências é conveniente fazer a seguinte definição.

4.15 Definição. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é *valor de aderência* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para x.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass diz que toda sequência limitada possui valor de aderência.

Observe que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então o conjunto dos seus valores de aderência também é limitado superiormente. Analogamente, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então o conjunto de seus valores de aderência também é.

4.16 Definição. Seja A o conjunto dos valores de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O *limite superior* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é ilimitada superiormente;} \\ \sup A & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada superiormente e } A \neq \varnothing; \\ -\infty & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada superiormente e } A = \varnothing. \end{cases}$$

O *limite inferior* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é ilimitada inferiormente;} \\ \inf A & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada inferiormente e } A \neq \varnothing; \\ +\infty & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada inferiormente e } A = \varnothing. \end{cases}$$

Essencialmente, o limite superior de uma sequência é o seu maior valor de aderência, enquanto que o limite inferior é seu menor valor de aderência, veja a Proposição 4.18.

A Proposição 4.5 diz que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se, e somente se, x é o único valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Isto também pode ser expresso por

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Pode parecer estranho tomar $-\infty$ como definição de limite superior de uma sequência limitada superiormente e sem valor de aderência. A razão é que, nestas condições, a sequência tende a $-\infty$. Desta forma, o resultado do parágrafo anterior também é válido para limites infinitos.

4.17 Proposição. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada superiormente e que não tem valor de aderência. Então $x_n \to -\infty$.

De fato, da definição, $\limsup x_n = -\infty$. Pela proposição 4.5, $\nexists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também não converge, assim $x_n \to -\infty$.

4.18 Proposição. Existe subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

Em particular, se $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}$, então este é o maior valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prova: Seja A o conjunto dos valores de aderência de x_n. Suponhamos inicialmente que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja ilimitada superiormente e, portanto,

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Neste caso, é imediato que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência que tende $a+\infty$.

Suponhamos, agora, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada superiormente e $A = \varnothing$. Portanto,

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada inferiormente, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, teremos $A \neq \varnothing$. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente e, portanto, tem subsequência tendendo a $-\infty$.

Finalmente, suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada superiormente e $A \neq \varnothing$. Como já observado antes, A é limitado superiormente e, portanto, seu supremo s é finito. Vamos mostrar que $s \in A$. Aplicando sucessivamente o resultado da observação abaixo, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\exists\, a_1 \in A \ \text{ tal que } \ s \geq a_1 > s-1;\\
&\exists\, a_2 \in A \ \text{ tal que } \ s \geq a_2 > s-1/2;\\
&\exists\, a_3 \in A \ \text{ tal que } \ s \geq a_3 > s-1/3; \ldots
\end{aligned}$$

Como a_1 é valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $s+1 > a_1 > s-1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s+1 > x_{n_1} > s-1$. Também temos $a_2 \in A$, logo, existe $n_2 > n_1$ tal que $s + \frac{1}{2} > x_{n_2} > s - \frac{1}{2}$. Prosseguindo deste forma, construímos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para s. Segue que $s \in A$.

4.19 Observação. Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente. Então $s = \sup A$ se, e somente se:

(i) s é cota superior de A;

(ii) se $r < s$ então existe $x \in A$ tal que $r < x \leq s$.

4.8 Séries

4.20 Definição. Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \ldots + x_n.$$

A sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita das *somas parciais* da série $\sum x_n$ e x_n é o n-*ésimo termo* ou *termo geral* da série. Escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

quando o limite acima existe e, neste caso, ele é dito *limite da série*. Dizemos que $\sum x_n$ é *convergente* ou *divergente* se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente ou divergente, respectivamente. Finalmente, dizemos que $\sum x_n$ é *absolutamente convergente* se a série $\sum |x_n|$ é convergente.

Exemplo 4.10. Considere a *Série Geométrica* de termo geral $x_n = r^{(n-1)}$. Temos

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1}.$$

Se $r = 1$, então é imediato que $S_n = n$. Segue que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge e, portanto, $\sum x_n$ diverge. Suponhamos $r \neq 1$. Multiplicando S_n por r obtemos

$$\begin{aligned} rS_n &= r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} + r^n \\ &= 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} + r^n - 1 \\ &= S_n + r^n - 1. \end{aligned}$$

Portanto, $S_n = \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$. Assim, $\sum x_n$ converge se, e somente se, $|r| < 1$ e, neste caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \frac{1}{1-r}.$$

A próxima proposição é uma versão da Proposição 4.13 para séries.

4.21 Proposição. Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$. Temos que

(i) $\sum(x_n + y_n)$ é convergente para $\sum x_n + \sum y_n$;

(ii) $\sum(c \cdot x_n)$ é convergente para $c \cdot \sum x_n$.

Prova: A demonstração é consequência da Proposição 4.13. Basta aplicá-la para as sequências das somas parciais de $\sum x_n$ e de $\sum y_n$.

Fique Atento!

Observamos que, em geral,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n \cdot y_n) \neq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Passamos ao estudo da natureza de séries, ou seja, estamos interessados em critérios que determinem se uma série é convergente ou divergente.

4.22 Teorema.

(i) $\sum x_n$ converge se, e somente se,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n \geq m \geq N \Rightarrow \left| \sum_{i=m}^{n} x_i \right| < \varepsilon.$$

(ii) Se $\sum x_n$ converge, então $x_n \to 0$.

(iii) Toda série absolutamente convergente é convergente.

Prova:

(i) O critério dado diz simplesmente que a sequência das somas parciais é de Cauchy. O resultado segue do Teorema 4.10.

(ii) Segue de (i), tomando $m = n$. Ou, de outro modo, seja $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Então existe $s = \lim S_n$. Evidentemente, tem-se também $s = \lim S_{n-1}$. Logo

$$0 = s - s = \lim S_n - \lim S_{n-1} = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim x_n.$$

(iii) Observamos que para todo $m, n \in N$ temos

$$\left|\sum_{i=n}^{m} x_i\right| \leq \sum_{i=n}^{m} |x_i| = \left|\sum_{i=n}^{m} |xi|\right|.$$

Portanto, por (i), a convergência de $\sum |x_n|$ implica a de $\sum x_n$.

O item (iii) do teorema anterior está intimamente ligado ao fato de $\mathbb{R}$ ser completo. Devemos ressaltar ainda que a sua recíproca não é verdadeira, ou seja, existem séries que são convergentes mas não absolutamente convergentes. Veremos um exemplo posteriormente.

Exemplo 4.11. Pelo item (ii), a condição $x_n \to 0$ é necessária para a convergência da série $\sum x_n$ porém ela não é suficiente. A *Série Harmônica* $\sum \frac{1}{n}$ é o contra exemplo mais famoso. De fato, temos

$$\begin{array}{rcll}
S_2 & = & 1 + \frac{1}{2}, & \\
S_4 & = & S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & > \; S_2 + \frac{2}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, \\
S_8 & = & S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} & > \; 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \\
 & \vdots & &
\end{array}$$

Portanto, $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Daí, segue que $\lim_{n \to +\infty} S_{2^n} = +\infty$. Concluímos que a série diverge.

Vamos tratar agora de alguns critérios de convergência para séries de termos positivos. Claramente, todos os critérios aqui expostos podem ser adaptados para séries de termos negativos. De fato, se $\sum x_n$ é uma série de termos negativos, então $\sum(-x_n)$ é uma série de termos positivos e, além disto, a primeira converge se, e somente se, a segunda converge.

Eventualmente, podemos usar também critérios sobre séries de termos positivos para uma série $\sum x_n$ que tenha termos de sinais variáveis. Ora, se ao aplicarmos algum destes critérios para a série $\sum |x_n|$ concluirmos que ela é convergente, então, como toda série absolutamente convergente é convergente, concluiremos que $\sum x_n$ converge. Por outro lado, se o critério nada disser, ou mesmo se ele nos informar que $\sum |x_n|$ é divergente, em geral, nada poderemos afirmar sobre a convergência da série $\sum x_n$.

Observamos também o seguinte fato, já mencionado no caso de sequências. Os primeiros termos de uma série nada influem na sua natureza. De fato, a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, a série $\sum x_{n+2007}$ converge. De maneira geral, fixado $p \in \mathbb{N}$ a série $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum x_{n+p}$ é convergente. Desta forma, todos os critérios que determinam a natureza de uma série através de alguma propriedade verificada por todos os seus termos continuam válidos se a tal propriedade é verificada à partir de algum termo (por exemplo, 2.007). Por outro lado, não podemos desprezar nenhum termo de uma série convergente quando estamos interessados em determinar o valor do seu limite.

4.23 Proposição. Uma série de termos positivos é convergente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais é limitada superiormente.

Prova: Por definição, $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Como $x_n \geq 0$, temos imediatamente que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Logo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, ela é limitada superiormente (ver proposições 4.6 e 4.7)

4.24 Teorema (Critério da Comparação)**.** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(i) Se $\sum y_n$ converge, então $\sum x_n$ converge.

(ii) Se $\sum x_n$ diverge, então $\sum y_n$ diverge.

Prova: Sejam $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as sequências de somas parciais de $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente. De $x_n \leq y_n$ segue imediatamente que $S_n \leq T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente, então $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é. Por outro lado, se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é. Concluímos graças à Proposição 4.23.

4.25 Proposição. Sejam $y \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in \mathbb{R}$. Temos:

(a) Se $y < x$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y < x_n$ para todo $n \geq N$.

(b) Se $x < y$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y$ para todo $n \geq N$.

(c) Se $x_n \geq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \geq y$;

(d) Se $x_n \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \leq y$.

Exemplo 4.12. Vamos estudar a natureza da série $\sum \frac{1}{n^p}$ segundo os valores de p. É claro que se $p \leq 0$, então ela diverge pois neste caso $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 0$.

Suponhamos $0 \leq p \leq 1$. Temos $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, por comparação com a Série Harmônica, concluímos que a série diverge.

Finalmente, consideremos o caso $p > 1$. Mostraremos que a série converge. Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência das somas parciais. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^p} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right) \\
&\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = \sum_{i=1}^{n} (2^{1-p})^{i-1}.
\end{aligned}$$

Como $p > 1$ temos $2^{1-p} < 1$ e, portanto, a Série Geométrica de razão 2^{1-p} converge. Segue que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente e portanto $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente.

4.26 Teorema (Teste da Razão, ou de d'Alembert)**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos.

(i) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, então $\sum x_n$ é convergente.

(ii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Prova:

(i) Tomemos $r \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < r < 1$. O resultado da proposição 4.25 garante que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < r$ para todo $n \geq N$. Temos então:

$$\begin{array}{lllll} x_{N+1} & < & rx_N; & & \\ x_{N+2} & < & rx_{N+1} & < & r^2x_N; \\ x_{N+3} & < & rx_{N+2} & < & r^3x_N; \\ \vdots & & & & \end{array}$$

De maneira geral, $x_n < r^{n-N} \cdot x_N$, para todo $n \geq N$. Tomando $y_n = r^{n-N} \cdot x_N$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) temos que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$. Como $\sum y_n$ é uma Série Geométrica de razão $r \in (0,1)$, ela é convergente. O resultado segue do Critério de Comparação.

(ii) Usando o resultado da proposição 4.25 concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ para todo $n \geq \mathbb{N}$. Portanto, $x_{n+1} \geq x_n$ para todo $n \geq N$. Segue que a sequência dos termos gerais da série é crescente a partir do N-ésimo termo e, portanto, não converge para zero. Logo, a série é divergente.

Exemplo 4.13. A série $\sum \dfrac{1}{n!}$ é convergente pois

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Analogamente, dado $x \in \mathbb{R}$, mostra-se que $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ é (absolutamente) convergente e, em particular, $\dfrac{x^n}{n!} \to 0$.

Nota 14. Quando $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, o Teste da Razão nada permite concluir (nem convergência nem divergência).

Há outras versões do Teste da Razão. A aqui apresentada não é a mais geral delas. Por exemplo, em (i), podemos substituir o símbolo de limite pelo símbolo de limite superior que a afirmação continua válida. Analogamente, a conclusão de (ii) permanece válida ao substituirmos o símbolo de limite pelo de limite inferior.

Exemplo 4.14. Vejamos exemplos para os quais o Teste da Razão não é conclusivo. Considere as séries $\sum \dfrac{1}{n}$ e $\sum \dfrac{1}{n^2}$. Já vimos que a primeira é divergente enquanto que a segunda é convergente. Porém, para ambas temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. De fato,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

4.27 Teorema (Teste da Raiz, ou de Cauchy)**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos.

(i) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, então $\sum x_n$ é convergente.

(ii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Prova:

(i) Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} < r < 1$. Da Proposição 4.25(a) obtemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{x_n} < r$, ou seja, $x_n < r^n$ para todo $n \geq N$. O resultado segue por comparação com a Série Geométrica $\sum r^n$.

(i) Análogo ao item anterior.

Nota 15. Quando $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, o Teste da Raiz nada permite concluir (nem convergência nem divergência).

Também há outras versões do Teste da Raiz. A apresentada acima não é a mais geral de todas. Por exemplo, (i) se generaliza ao substituirmos o símbolo de limite pelo símbolo de limite superior. Analogamente, em (ii), podemos substituirmos o símbolo de limite pelo de limite inferior.

O Teste da Raiz é mais eficiente que o da Razão. Mais precisamente, em todos os casos nos quais o Teste da Razão permite concluir (seja por convergência ou por divergência) o Teste da Raiz também será concludente. Entretanto, o Teste da Razão é, em geral, mais fácil de ser aplicado.

4.9 A Série dos Inversos dos Primos

Veremos um interessante resultado sobre a série dos inversos dos primos. O primeiro a demonstrá-lo foi Euler. A demonstração que apresentaremos aqui é mais uma das preciosidades de Erdös. O argumento é do tipo combinatório. Antes de apresentá-lo façamos uma definição.

4.28 Definição. A função *Parte Inteira* é definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por

$$\lfloor x \rfloor = n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{e}\ n \leq x < n+1.$$

Exemplo 4.15. Temos $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 1.4 \rfloor = 1$ e $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.

4.29 Proposição. Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência estritamente crescentes dos números primos $(p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots)$. A série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ diverge.

Prova: Suponhamos por absurdo que $\sum \dfrac{1}{p_n}$ converge. Portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}.$$

Seja $M = 2^{2N}$. Temos que $M = \#A + \#B$, sendo

$$A = \{m \in \{1, \ldots, M\}\,;\ m \text{ é múltiplo de algum dos primos } p_N, p_{N+1}, \ldots\},$$
$$B = \{m \in \{1, \ldots, M\}\,;\ m \text{ não é múltiplo de nenhum dos primos } p_N, p_{N+1} \ldots\}.$$

Vamos mostrar que $\#A < \dfrac{M}{2}$ e $\#B \leq \dfrac{M}{2}$ chegando assim a uma contradição.

O número de múltiplos do primo p que são menores que M é $\left\lfloor \frac{M}{p} \right\rfloor$. Segue que

$$\#A \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \left\lfloor \frac{M}{p_n} \right\rfloor \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{M}{p_n} < \frac{M}{2}.$$

Também é fácil ver que todo $m \in B$ pode ser escrito como $m = a \cdot b^2$ sendo a um produto de primos distintos, todos menores que p_N, e b^2 um produto de quadrados de primos, também menores que p_N. Existem exatamente 2^{N-1} números nas condições de a. Temos ainda que $b^2 \leq m \leq M$ e portanto $b \leq \sqrt{M} = 2^N$. Segue que existem, no máximo, 2^N números nas condições de b. Portanto $\#B \leq 2^{N-1} \cdot 2^N = 2^{2N-1} = \frac{M}{2}$.

Capítulo 5

Limites de Funções

Dada uma função real f estamos interessados em saber o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor. Este é o assunto desta seção. Muitas vezes $f(x)$ se aproximará de $f(x_0)$, porém, isto só ocorre para uma classe de funções, ditas contínuas. Trataremos desta questão posteriormente.

Iniciamos nossa discussão precisando o que quisemos dizer, com "x se aproxima de um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor". Ora, se estamos interessados no valor de $f(x)$ é preciso que x esteja no domínio de f mas, como x não assume o valor x_0, não é necessário que $f(x_0)$ esteja definido. Ou seja, não é necessário que x_0 pertença ao domínio de f. Porém, é preciso que seja possível "se aproximar de x_0" por pontos do domínio de f. Rigorosamente falando, se A é o domínio de f, então a noção de limite de funções terá sentido se, e somente, x_0 é ponto de acumulação de A. Lembramos que esta condição significa que $x_0 \in \overline{A \setminus \{x0\}}$, isto é, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0.

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A. Como expressar de maneira rigorosa que $f(x)$ se aproxima de $L \in \mathbb{R}$ quando x se aproxima de x_0? A experiência com limite de sequências nos indica que deve ser errado pensar que a distância de $f(x)$ a L decresce junto com a distância de x a x_0. A idéia intuitiva correta é dizer que $f(x)$ é tão próximo de L quanto quisermos, bastando para isto tomar x suficientemente próximo de x_0. Vejamos a definição rigorosa.

5.1 Definição. Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A. Dizemos que existe o *limite* de $f(x)$ quando x tende a $x_0 \in \mathbb{R}$ e ele vale $L \in \mathbb{R}$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

De outro modo, seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que f assume valores arbitrariamente próximos de L, se todo intervalo aberto contendo L contém um valor $f(x)$ para algum $x \in A$.

Cuidado! Só faz sentido considerar o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 quando x_0 é ponto de acumulação do domínio de f. Daqui por diante, esta condição ficará subentendida quando estivermos considerando limites.

Exemplo 5.1. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

mostre que não existe o limite de f quando tende a 0.

Solução: Veja primeiro que $0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{R} - \{0\}$. Vamos supor que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, obtemos a existência de $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 1$ quando $0 < |x| < \delta$. Portanto,

$$2 = |1 - (-1)| = \left| f\left(\frac{\delta}{2}\right) - f\left(-\frac{\delta}{2}\right) \right| \leq \left| f\left(\frac{\delta}{2}\right) - L \right| + \left| f\left(-\frac{\delta}{2}\right) - L \right| < 1 + 1 = 2.$$

Absurdo!

Exemplo 5.2. Seja $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in A = (0,1]$. Observe que 0 não está no domínio de f mas é ponto de acumulação deste. Logo, faz sentido perguntar se existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 0 e, no caso afirmativo, determinar o valor do limite. Mostre que ele existe e vale 1.

Solução: Seja $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in (0,1]$ temos $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Portanto, tomando qualquer $\delta > 0$, temos

$$x \in A, 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

Concluímos assim que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Pratique! Da mesma maneira mostra-se que se $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é constante igual a c, ou seja, $g(x) = c$, $\forall\, x \in A$, e $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$, então $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c$.

O exemplo anterior é atípico. Se x_0, ε e δ são como na Definição 5.1, então, geralmente, δ depende de ε e de x_0. Muitas vezes esta dependência é indicada na notação $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Os exemplos a seguir ilustram esta dependência. No primeiro deles δ depende apenas de ε e, no segundo, δ depende tanto de ε quanto de x_0.

Exemplo 5.3. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$.

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$, obtemos

$$x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon.$$

Exemplo 5.4. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^2$

Solução: Fixado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{2|x_0| + 1}\right\}$. Desta forma, se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|x| < |x_0| + \delta \leq |x_0| + 1$. Além disto,

$$|f(x) - x_0^2| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \delta(|x| + |x_0|) < \delta(2|x_0| + 1) = \epsilon.$$

Nota 16. O exemplo anterior pode nos induzir a pensar que achar δ em função de ϵ e de x_0 é uma tarefa sobrenatural. Normalmente, rascunha-se a demonstração de trás para frente:
sabendo que devemos obter $|f(x) - L| < \epsilon$, procuramos saber quão grande pode ser $|x - x_0|$ (isto é, qual deve ser o valor de δ) para que cheguemos a esta conclusão.
Em seguida, passamos a limpo a demonstração e, já sabendo qual é o valor de δ, simplesmente dizemos:

"seja $\delta =$ abracadabra ..."

Porém, dependendo da função, mesmo que achar o valor de δ não seja mágica, tal tarefa pode ser bastante fatídica. Uma alternativa é fazer uso das proposições que iremos apresentar no decorrer destas notas. Elas facilitam as demonstrações de existência e os cálculos dos limites, sem necessidade de manipular ϵ's e δ's.

Exemplo 5.5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe o limite de f quando x tende 1 e determine este limite.

Solução: Intuitivamente, nos parece óbvio que, à medida em que x se aproxima de 1, a função $f(x) = 2x + 1$ se aproxima de 3. Assim, vamos intuir que $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$ e então mostrar que é o caso.

Investiguemos, inicialmente, se existe uma correspondência entre as vizinhanças de $L = 3$ e $x_0 = 1$, ou seja, se existe algum valor para δ se tomarmos um ε qualquer.

Temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, isto é, $|(2x+1) - 3| = |2x - 2| = |2(x-1)| = 2|x-1| < \varepsilon$. Logo, $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, se fizermos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, teremos $0 < |x - 1| < \delta$.

Deste modo, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, obtemos

$$x \in \mathbb{R}, 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| = |2x + 1 - 3| = 2|x - 1| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

No exemplo anterior, intuímos que $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$ e provamos que é o caso. No entanto, não mencionamos a possibilidade de existir outra valor $L \in \mathbb{R}$ diferente de 3 para $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)$. Na verdade, não existe, pois quando o limite existe ele é único. Veja o teorema a seguir, da unicidade do limite.

5.2 Teorema (Unicidade do limite)**.** Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ um ponto de acumulação. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = M$ então $L = M$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que para $x \in A$, temos $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ e $|f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Seja $x \in A$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, então podemos escrever

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |f(x) - L| + |f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, temos que $|L - M| = 0$ e portanto $L = M$.

Pratique! De um modo geral, mostre que $\lim\limits_{x\to x_0} a \cdot x + b = a \cdot x_0 + b$.

5.3 Teorema. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $a \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$. Então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ com $\lim x_n = x_0$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.

Prova: Suponhamos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ e mostremos que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ e $x_n \to x_0$, então $f(x_n) \to L$. Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{5.1}$$

Ora, $x_n \to x_0$, logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x_0| < \delta$. Assim, para $n \geq N$, ao tomar $x = x_n$ em (5.1) obtemos $|f(x_n) - L| < \epsilon$. Concluímos que $f(x_n) \to L$.

Reciprocamente, suponhamos que seja falso que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Isto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\forall\, \delta > 0,\ \ \exists\, x \in A \ \text{ tal que } \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ e } \ |f(x) - L| \geq \epsilon. \tag{5.2}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, ao tomar $\delta = \dfrac{1}{n}$ em (5.2) obtemos $x_n \in A$ tal que

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ \text{ e } \ |f(x_n) - L| \geq \epsilon.$$

Constrói-se desta maneira uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0 sem que $f(x_n) \to L$. Absurdo!

Vejamos como esta proposição facilita o cálculo de limites.

Exemplo 5.6. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ convergente para a. Temos então que $f(x_n) = x_n^2 \to a^2$. Como a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é arbitrária, concluímos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a^2$.

5.4 Teorema. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L < M$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in A$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$. Uma conclusão análoga vale quando $L > M$.

Prova: Tomando $\epsilon = M - L > 0$, na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < M - L$ se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta$. Ora

$$f(x) - L \leq |f(x) - L| < M - L \Rightarrow f(x) < M.$$

5.5 Corolário. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in A$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$.

5.6 Corolário. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A \setminus \{x_0\}$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, então $L \leq M$.

5.7 Teorema (Operações com limites)**.** Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ com $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$. Então:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ se $M \neq 0$;

(iv) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ e g é uma função limitada numa vizinhança de x_0, então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Prova:

(i) Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que para $0 < |x - x_0| < \delta_1$ temos $|f(x) - L| < \dfrac{\epsilon}{2}$

e para $0 < |x - x_0| < \delta_2$ temos $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, se $0 < |x - x_0| < \delta$ temos $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo,

$$|[f(x) + g(x)] - [L + M]| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.

(ii) Sejam dadas duas sequências reais (x_n) e $(y_n), n \in \mathbb{N}$ com $\lim x_n = x_0$ e $\lim y_n = y_0$. Considerando (y_n) uma sequência limitada por uma constante positiva k temos:

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x_0 \cdot y_0| &= |(x_n - x_0)y_n + x_0(y_n - y_0)| \\ &\leq |(x_n - x_0)||y_n| + |x_0||(y_n - y_0)| \\ &\leq k \cdot |(x_n - x_0)| + |x_0||(y_n - y_0)| \end{aligned}$$

Tanto $|x_n - x_0|$ como $|y_n - y_0|$ podem ser tomados arbitrariamente pequenos, desde que n seja suficientemente grande. Assim dado $\epsilon > 0$ podemos considerar $|x_n - x_0| < \frac{\epsilon}{2k}$ a partir de um certo n_1 e $|y_n - y_0| < \frac{\epsilon}{2|x_0|}$ a partir de um certo n_2. Sendo $n = \max\{n_1, n_2\}$ teremos:

$$|x_n \cdot y_n - x_0 \cdot y_0| \leq k|x_n - x_0| + |x_0||y_n - y_0| < k \cdot \frac{\epsilon}{2k} + |x_0| \frac{\epsilon}{2|x_0|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo, $|x_n \cdot y_n - x_0 \cdot y_0| < \epsilon$ e então $\lim x_n \cdot y_n = x_0 \cdot y_0$, isto é, pelo teorema 5.3 temos $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.

(iii) Como temos a igualdade $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$ e já mostramos que o limite do produto é o produto dos limites, basta mostrar que se $\lim y_n = y_0$ então $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$ com $y_0 \neq 0$.

Observe que $\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{y_n \cdot y_0}$; como $y_0 \neq 0$, a partir de um certo n_1 temos $|y_n| > \frac{|y_0|}{2}$; e dado $\epsilon > 0$, a partir de um certo n_2, podemos ter $|y_n - y_0|$ menor que $\frac{|y_0|^2 \epsilon}{2}$. Considerando $n = \max\{n_1, n_2\}$ teremos que $\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| < \frac{|y_0|^2 \epsilon / 2}{y_0^2 / 2} = \epsilon$. E assim temos $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.

(iv) Temos que, se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada, então existe $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos $|x_n| < \frac{\epsilon}{c}$. Então para $n > n_0$ temos $|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\epsilon}{c} \cdot c = \epsilon$. Logo $\lim x_n \cdot y_n = 0$ e portanto $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Perceba! No item (ii) da proposição acima, se $f(x) = c \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \to x_0} [c \cdot g(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Pratique! Usando as propriedades operatórias de limites calcule o valor de $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

5.8 Teorema (Teorema do Sanduíche)**.** Sejam $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{X} = A \backslash \{x_0\}$, então $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

Prova: Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que para $x \in \mathbb{X}$ temos $L - \epsilon \leq f(x) \leq L + \epsilon$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ e $L - \epsilon \leq g(x) \leq L + \epsilon$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então para $x \in \mathbb{X}$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ temos $L - \epsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq L + \epsilon$. Logo, $L - \epsilon \leq h(x) \leq L + \epsilon$

e então $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

Exemplo 5.7. Se $g : A \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = x \cdot \text{sen}(x)$, então tem-se que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

Exemplo 5.8. Para todo polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ tem-se $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Também para toda função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, quociente de dois polinômios, tem-se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ desde que $q(x_0) \neq 0$.

5.1 Limites Laterais, Infinitos e no Infinito

5.9 Definição. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e agora x_0 ponto de acumulação de $A \cap (x_0, +\infty)$. Dizemos que L é limite à direita de f em x_0 se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ \ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso escrevemos $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Similarmente, definimos:

5.10 Definição. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e agora x_0 ponto de acumulação de $A \cap (-\infty, x_0)$. Dizemos que L é limite à esquerda de f em x_0 se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ \ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso escrevemos $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Nota 17. É possível mostrar que se x_0 é ponto de acumulação tanto de $A \cap (x_0, +\infty)$ como de $A \cap (-\infty, x_0)$, então

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Exemplo 5.9. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, então não existe limite de f no zero.

Outra definição importante é a de limite infinito.

5.11 Definição. Dizemos que f tende a $+\infty$ em x_0 se para todo $M \in \mathbb{R}_+$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

Escrevemos então que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Similarmente definimos:

5.12 Definição. Dizemos que f tende a $-\infty$ em x_0 se para todo $N \in \mathbb{R}_-$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < N.$$

Escrevemos então que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemplo 5.10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, pois dado $M > 0$, tomando $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ temos

$$0 < |x - 0| < M \ \Rightarrow\ x^2 < \delta^2 = \frac{1}{M} \ \Rightarrow\ \frac{1}{x^2} > M.$$

Finalmente definimos limites "no infinito".

5.13 Definição. Seja $c \in \mathbb{R}$ e $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é limite de f quando $x \to +\infty$ se para todo ϵ existe $\alpha > c$ tal que

$$\forall\ \ x > \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Escrevemos então que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Analogamente definimos:

5.14 Definição. Seja $c \in \mathbb{R}$ e $f : (-\infty, c) \to \mathbb{R}$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é limite de f quando $x \to -\infty$ se para todo ϵ existe $\beta < c$ tal que

$$\forall\ \ x < \beta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Escrevemos então que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Cuidado! || Nem sempre existe limite no infinito. Tome por exemplo a função $\operatorname{sen}(x)$.

Capítulo 6

Funções Contínuas

A seguinte frase é facilmente aceita pela nossa intuição: "se x é um número próximo de 3, então x^2 é um número próximo de 9". Outra, "x^2 estará cada vez mais próximo de 9 quanto mais próximo x estiver de 3". Por esta razão dizemos que a função $f(x) = x^2$ (para todo $x \in \mathbb{R}$) é contínua no ponto 3. Muitas das funções que encontramos na Análise são funções contínuas. Queremos precisar o conceito de continuidade. Observe que para isto é necessário estabelecer o que queremos dizer com "x é um número próximo de 3".

Intuitivamente, uma função f é contínua em um ponto x_0 do seu domínio se $f(x)$ está próximo de $f(x_0)$ quando x está próximo de x_0. Induzidos pela discussão que precedeu a definição de limite de funções, somos tentados a dizer que $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0 quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{6.1}$$

É quase isto, mas não exatamente. O problema é um "detalhe técnico". A definição de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ exige que x_0 seja ponto de acumulação de A. Por outro lado, para que $f(x_0)$ tenha sentido devemos ter $x_0 \in A$. Estas duas condições podem ser incompatíveis (veremos um exemplo a seguir). Entretanto, quando x_0 verificar ambas as condições a definição que faremos será equivalente a (6.1).

Exemplo 6.1. Seja $A = [0,1) \cup \{2\}$. Temos que $2 \in A$ mas $2 \notin \overline{A \setminus \{2\}} = [0,1]$. Dada $f : A \to \mathbb{R}$, $f(2)$ tem sentido ao contrário de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Por outro lado, $1 \notin A$ e $1 \in \overline{A \setminus \{1\}} = [0,1]$. Logo, não existe $f(1)$, porém, pode existir $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

6.1 Definição. Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Dizemos que f é contínua em x_0 se

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Dizemos ainda que f é contínua, se f é contínua em todo ponto de A e escrevemos $f \in C^0(A)$. Mais precisamente, $f \in C^0(A)$ se

$$\forall\, y \in A,\ \ \forall\, \epsilon > 0,\ \ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \in A, |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{6.2}$$

Atenção! Alguns autores costumam denotar por $C(A)$, em vez de $C^0(A)$, ao conjunto das funções contínuas em A.

Observe que a definição de continuidade tem (como esperávamos) uma relação muito grande com a definição de limite. Por esta razão, podemos facilmente adaptar argumentos usados em exercícios de limites para mostrar a continuidade de funções. Por exemplo, mostre que são contínuas as funções $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = c$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^2$ para todo $x \in A$.

Exemplo 6.2. Este exemplo pretende acabar com o mito, geralmente apresentado nos cursos de Cálculo I, que diz que funções contínuas são aquelas cujos gráficos são traçados sem tirar o lápis do papel. Considere a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $g(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Faça um esboço do gráfico de g e convença-se que não é possível desenhá-lo sem tirar o lápis do papel. Ora, a função g é a mesma do parágrafo anterior (com $A = \mathbb{N}$) que, como já sabemos, é contínua! Você está duvidando? Vejamos com mais detalhes. Sejam $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $x \in \mathbb{N}$ e $|x - n| < \dfrac{1}{2}$, então $x = n$ e, portanto, $|g(x) - g(n)| = 0 < \epsilon$. Concluímos que g é contínua em n e, como n é arbitrário, concluímos que g é contínua!

Observe que tomamos $\delta = \dfrac{1}{2}$ independente de ϵ e de n. Mais que isto, nem a definição de g não foi necessária na demonstração. Moral da história: funções definidas em $\mathbb{N}$ não apenas são contínuas como são "muito contínuas"!

Importante Algumas observações são importantes:

- ⋄ Na definição de limite, o ponto no qual se calcula o limite não pertence necessariamente ao domínio da função. Ao passo que, na continuiudade, só faz sentido se o ponto pertencer ao domínio da função.
- ⋄ Se a função já está definida em x_0 e seu valor aí coincide com o limite no ponto a, então a função é contínua no ponto a. Isto é, se $x_0 \in A \cap \overline{A}$, então f é contínua em $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemplo 6.3. Se x_0 é um ponto isolado de A então toda função $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto x_0.

Exemplo 6.4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $x_0 = 1$. Verifique!

Exemplo 6.5. Todo polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Verifique!

Exemplo 6.6. Toda função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio para os quais $q(x) \neq 0$, tais que $f(x) \neq 0$. Verifique!

6.2 Definição. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita descontínua no ponto $x_0 \in A$ se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ pode-se achar $x_\delta \in A$ tal que $|x_\delta - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

Passemos às proposições que nos poupam, em muitos casos, o trabalho com ϵ's e δ's. Todas elas têm demonstrações análogas a aquelas encontradas na seção de limites. Por esta razão omitiremos algumas de suas provas.

6.3 Teorema. Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. A função f é contínua em x_0 se, e somente se, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$ para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente para x_0.

Perceba com este teorema que, essencialmente, funções contínuas são aquelas que comutam com o símbolo de limite, ou seja, f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right),$$

desde que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esteja contida no domínio de f e seja convergente para um ponto deste conjunto.

Exemplo 6.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário, tomando sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^\complement$ convergentes para x_0, obtemos que $f(x_n) \to 1$ e $f(y_n) \to 0$. Concluímos assim que f é descontínua em qualquer ponto.

6.4 Corolário. Dadas as funções $f, g : A \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $x_0 \in A$, então $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ são contínuas neste mesmo ponto. Se $g(x_0) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ também é contínua no ponto x_0.

6.5 Proposição. Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to A$ tais que $f(A) \subset B$. Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0. Segue que se f e g são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.

Prova: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente para x_0. Como f é contínua temos que $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$, e como g é contínua em y_0 temos que $g(f(x_n)) \to g(y_0) = g(f(x_0))$. Segue que $g \circ f$ é contínua em x_0.

6.6 Proposição. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in A$. Se $f(x_0) < L \in \mathbb{R}$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < L$ para todo $x \in A$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Temos uma conclusão análoga se $f(x_0) > L$.

6.1 O Teorema do Valor Intermediário

6.7 Teorema (do Valor Intermediário)**.** Se $f \in C([a,b])$ e $f(a) < L < f(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = L$. A mesma conclusão vale quando $f(a) > L > f(b)$.

Prova: Seja $S = \{x \in [a,b]; f(x) = L\}$. É imediato que S é não vazio ($a \in S$) e limitado superiormente (b é cota superior de S). Sejam $c = \sup S$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tal que $x_n \to c$. Temos que $f(x_n) = L$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como f é contínua em c temos

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(c).$$

Portanto, $f(c) \leq L$ e, logo, $c < b$.

Suponhamos que $f(c) < L$. Graças à Proposição 6.6 existe $\delta > 0$ tal que se $x \in [a,b]$ e $|x - c| < \delta$, então

$f(x) < L$. Como $c < b$ podemos tomar $x \in [a, b]$ com $c < x < c + \delta$ para obter que $f(x) < L$. Isto implica que $x \in S$ e $x > c = \sup S$, o que é absurdo.

Exemplo 6.8. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 12$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo $[5, 6]$.

Solução: Como vimos no exemplo 6.5, toda função polinomial é contínua. Portanto f é contínua, em particular no intervalo $[5, 6]$. Como $f(5) = -12$ e $f(6) = 18$, pelo teorema do valor intermediário, existe pelo menos um $c \in [5, 6]$, tal que $f(5) = -12 < f(c) < 18 = f(6)$ e logo, algum c tal que $f(c) = 0 \in [-12, 18]$.

Pratique! Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, onde $a_n > 0$ e n é ímpar. Mostre que:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$;

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$;

(c) $p(x)$ tem raiz, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.

6.8 Proposição. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, em que I é um intervalo não degenerado. Então:

(i) $J = f(I)$ é um intervalo;

(ii) Se f é injetiva, então f é monótona;

(iii) Se f é injetiva, então a função $f^{-1} : J \to I$ é contínua.

Prova:

(i) Sejam $a = \inf J$ e $b = \sup J$. Vamos mostrar que $\operatorname{int} J = (a, b)$ de onde seguirá que J é um intervalo (valerá uma dentre as seguintes possibilidades: $J = (a, b)$, $J = [a, b)$, $J = (a, b]$ ou $J = [a, b]$).

É fácil perceber que se $y \leq a = \inf J$, então $y \notin \operatorname{int} J$. Da mesma forma, se $y \geq b = \sup J$, então $y \notin \operatorname{int} J$. Segue que $\operatorname{int} J \subset (a, b)$.

Seja $y \in (a, b)$. Por definição de ínfimo e supremo, existem $y_1, y_2 \in J$ tais que $a < y_1 < y < y_2 < b$. Como $J = f(I)$, existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, obtemos que $x_1 \neq x_2$. Suponhamos, por simplicidade, que $x_1 < x_2$. Aplicando o Teorema do Valor Intermediário à função f no intervalo $[x_1, x_2]$ concluímos que existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = y$. Segue que $y \in J$. Mostramos assim que $(a, b) \subset J$. Como (a, b) é aberto, obtemos $(a, b) \subset \operatorname{int} J$.

(ii) Suponhamos, por absurdo, que f não seja monótona. Então existem $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ tais que $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ ou $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Consideremos o primeiro caso (o segundo é análogo). Seja $L \in (f(x_1), f(x_2)) \cap ((f(x_3), f(x_2))$. Graças ao Teorema do Valor Intermediário, existem $s \in (x_1, x_2)$ e $t \in (x_2, x_3)$ tais que $f(s) = f(t) = L$, contrariando a injetividade de f.

(iii) Já sabemos que f é monótona. Para fixar as idéias, suponhamos que f é crescente. Seja $y \in J$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ tal que $y_n \to y$. Vamos mostrar que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$. Dado $\epsilon > 0$, se $r, t \in I$ são tais que $f^{-1}(y) - \epsilon < s < f^{-1}(y) < t < f^{-1}(y) + \epsilon$, então $f(s) < y < f(t)$. Como $y_n \to y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$f(s) < y_n < f(t)$ se $n \geq n_0$. Neste caso, $f^{-1}(y) - \epsilon < s < f^{-1}(y_n) < t < f^{-1}(y) + \epsilon$. Portanto $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| < \epsilon$ se $n \geq n_0$.

Exemplo 6.9. Existência da raiz n-ézima de um número real a, isto é, $\sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Considere a função $f[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Como f é crescente (estritamente crescente), temos que f é injetora, $f(0) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donde f é sobrejetora e, portanto, bijetora. Dado $a \in [0, +\infty)$, existe um número $b \in [0, +\infty)$ tal que $f(b) = a$, isto é, $b^n = a$, ou seja, $b = \sqrt[n]{a}$.

Quando n for ímpar, a bijeção será de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Pratique! Seja $f : [0, 1) \cup [2, 3] \to [0, 2]$ dada por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1)$ ou $f(x) = x - 1$ se $x \in [2, 3]$. Mostre que f é uma bijeção contínua com inversa dada por $f^{-1}(y) = y$ se $y \in [0, 1)$ ou $f^{-1}(y) = y + 1$ se $y \in [1, 2]$. Conclua que f^{-1} é descontínua em 1.

Pratique! Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $A \subset R$. Considere a seguinte definição: f é contínua em A se f é contínua em todos os elementos de A. A notação $f\big|_A$ indica que f é definida em $A \subset \mathbb{R}$, ou seja, uma restrição. Assim:

(a) Mostre que se f é contínua em A, então $f\big|_A$ é contínua.

(b) Encontre um exemplo onde $f\big|_A$ é contínua mas f é não é contínua em $\mathbb{R}$.

6.2 Funções contínuas Definidas em Compactos

A compacidade pode ser bem explorada em várias aplicações. A compacidade é uma propriedade preservada por funções contínuas.

6.9 Teorema (Preservação de compacidade)**.** Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(K)$ é compacto.

Prova: Seja $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ coleção de abertos em $\mathbb{R}$ tal que $f(K) \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$. Logo $K \subset \bigcup\limits_\alpha f^{-1}(G_\alpha)$. Por f ser contínua, para todo α existe H_α aberto em $\mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(G_\alpha) = H_\alpha \cap K$. Portanto $\{H_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, então existe $\{H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_n}\}$ cobertura finita. Logo,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} H_{\alpha_i} \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i}),$$

e então $f(K) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f(G_{\alpha_i})$. Portanto, achamos uma subcobertura finita para $f(K)$, e concluímos assim que $f(K)$ é compacto.

6.10 Definição. Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ é limitada em A se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in A$.

Exemplo 6.10.

◇ As funções $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são limitadas em $\mathbb{R}$, pois $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ e $|\cos(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

◇ A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é limitada em R_+. Entretanto $f(x)$ é limitada em $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ pois $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leq 2$ para todo x neste intervalo.

6.11 Corolário. Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, então f é limitada em K.

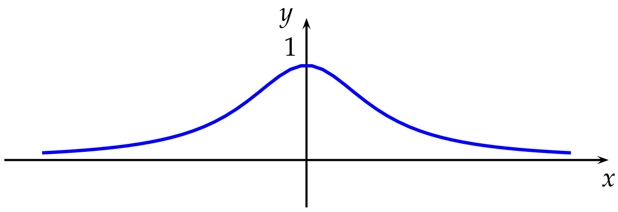
6.12 Definição. Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $B \subset A$. Se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in B$, então dizemos que x_0 é um *ponto de máximo* de f em B. Neste caso, $f(x_0)$ é o *valor máximo* de f em B. Se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in B$, então x_0 é dito *ponto de mínimo* de f em B e $f(x_0)$ é o *valor mínimo* de f em B. Se x_0 é ponto de máximo ou de mínimo em B, então x_0 é chamado de *extremo* em B. Em particular, quando $B = A$ trata-se de *máximo global* ou *mínimo global* ou *extremo global* de f.

Nota 18. Se uma função f como acima definida assume seus valores máximo e mínimo em A, então f é limitada em A.

Exemplo 6.11. A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ não é limitada em $(-1, 1)$, mas é limitada em $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, por exemplo.

Exemplo 6.12. A função $g(x) = x$ é contínua e limitada em $(-1, 1)$, mas não assume valor máximo nem mínimo em $(-1, 1)$. Entretanto f assume seus valores máximo e mínimo em $[-1, 1]$.

Exemplo 6.13. A função $h(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ é limitada em $\mathbb{R}$, assume seu valor máximo em $x = 0$, pois $0 < \dfrac{1}{1 + x^2} \leq 1 = h(0)$. h não assume seu valor mínimo, isto porque $\inf h(\mathbb{R}) = 0 \neq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



De modo geral, temos:

6.13 Teorema (Weierstrass)**.** Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua num compacto $K \subset \mathbb{R}$, então f tem pontos de máximo e de mínimo em K.

Prova: Mostraremos inicialmente que f é limitada superiormente em K. Suponhamos, por absurdo que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $f(x_n) > n$. Claramente, temos que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$. Como K é compacto, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para algum $x \in K$ (por abuso de notação, tal subsequência também será denotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, isto não deve atrapalhar o seu entendimento). Como f é contínua concluímos que $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$. Absurdo!

Mostremos agora que existe ponto de máximo em K. Sendo f limitada superiormente em K, existe $M = \sup\{f(x); x \in K\}$. Tomemos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = M$. Como anteriormente, podemos extrair uma subsequência, ainda denotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergente para $x_0 \in K$. Da continuidade de f concluímos que $f(x_0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = M$. Segue que x_0 é um máximo de f em K.

A demonstração da existência de um ponto de mínimo de f em K é análoga

6.3 Funções Uniformemente Contínuas

Considere $g(x) = \dfrac{1}{x}$, para $x \in (0, 1)$. Seja $c \in (0, 1)$. Então

$$g(c) - g(x) = \frac{1}{c} - \frac{1}{x} = \frac{x - c}{cx}.$$

Para mostrarmos que g é contínua em c. seja $\epsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\epsilon < 1$, e portanto $\epsilon \cdot c < 1$. Seja $\delta = \dfrac{c^2 \cdot \epsilon}{2}$. Então

$$|x - c| < \delta \Rightarrow c < x + \delta = x + \frac{c^2 \cdot \epsilon}{2} < x + \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} < x.$$

Logo

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(c)| = \frac{|x - c|}{cx} < \frac{\delta}{cx} = \frac{c^2\epsilon}{2cx} = \frac{c\epsilon}{2x} < \epsilon$$

onde usamos que $\dfrac{c}{2} < x$ na última desigualdade. Mostramos então, usando ϵ's e δ's que $\dfrac{1}{x}$ é contínua em todo ponto diferente de zero.

O objetivo principal do cálculo acima é ressaltar que a escolha de δ não é uniforme em relação ao ponto c, isto é, δ depende de c.

Em outros casos, a escolha de δ independe do ponto em questão. Por exemplo, para $f(x) = x$, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ temos

$$|x - c| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Dizemos que esta função é uniformente contínua.

6.14 Definição. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *uniformemente contínua* se

$$\epsilon > 0, \ \delta > 0 \ \ \text{tal que} \ \ x, y \in A, \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Observe bem a diferença entre as definições de continuidade e continuidade uniforme. Apenas trocamos a expressão "$y \in A$" de lugar. Isto é realmente uma grande diferença. A definição de continuidade diz que, dado $\epsilon > 0$ e $y \in A$, existe $\delta > 0$, dependente de ϵ e de y tal que se $x \in A$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. A definição de continuidade uniforme nos diz mais que isto: é possível encontrar δ, independente de y.

Ainda, na definição, x e y desempenham papéis inteiramente simétricos. Fixado ϵ, a escolha de δ só depende de ϵ, ao contrário do que sucede na definição de função contínua num ponto em que, para cada ϵ, a escolha de δ depende de ϵ e do ponto em questão.

Por exemplo, a função $f : [-2, 2] \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-2, 0) \\ 1 & \text{se } x \in (0, 2] \end{cases}$$

não é uniformemente contínua em $[-2, 2] \backslash \{0\}$, apesar de ser obviamente contínua. Para verificarmos que não é uniformente contínua, fixando $\epsilon = 1$, é possível, qualquer que seja $\delta > 0$, encontrar pontos x, y em $[-2, 2] \backslash \{0\}$, por exemplo

$$x = \max\left\{-2, -\frac{\delta}{4}\right\} \quad y = \min\left\{\frac{\delta}{4}, 2\right\},$$

tais que $|x - y| = \min\left\{\dfrac{\delta}{4}, 4\right\} < \delta$ e $|f(x) - f(y)| = |-1 - 1| = 2 > 1 = \epsilon$.

Vejamos exemplos de funções uniformemente contínuas.

Exemplo 6.14. A função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}; \ |x - y| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| < \varepsilon.$$

De fato, sendo $\varepsilon > 0$ basta escolher $\delta = \varepsilon$ e sabendo que $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| &= \left|2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| = 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|. \end{aligned}$$

Exemplo 6.15. Veremos, a partir da definição, que a função $f(x) = 7 - x^2$ é uniformemente contínua em $[-10, 1]$, isto é, que é verdadeira a proposição

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in [-10, 1], \; |x - y| < \delta \Rightarrow |7 - x^2 - (7 - y^2)| < \varepsilon.$$

Assim, seja $\varepsilon > 0$. Como

$$|7 - x^2 - (7 - y^2)| = |-x^2 + y^2| = |x - y||x + y| \leq 20|x - y|,$$

segue que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |7 - x^2 - (7 - y^2)| < \varepsilon,$$

se $\delta < \dfrac{\varepsilon}{20}$.

Vejamos outro exemplo de função contínua que não é uniformemente contínua.

Exemplo 6.16. Vimos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua. No entanto f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, isto é, é falsa a proposição

$$\forall \delta > 0 \, \exists \epsilon > 0 \, \forall x, y \in \mathbb{R}, \; |x - y| < \epsilon \Rightarrow |x^2 - y^2| < \delta.$$

Da igualdade $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$ podemos concluir que x e y podem estar tão próximos quanto se queira e a diferença entre as suas imagens ser arbitrariamente grande (basta pensar em pontos x e y cuja diferença seja sempre inferior a ϵ, mas que estejam arbitrariamente longe da origem).

O resultado abaixo garante que todas as funções contínuas em conjuntos fechados limitados são uniformemente contínuas.

6.15 Teorema (de Cantor)**.** Se K é compacto e $f \in C^0(K)$, então f é uniformemente contínua em K.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que f não é uniformemente contínua. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\forall\, \delta > 0, \;\; \exists\, x, y \in K \;\; \text{tais que} \;\; |x - y| < \delta \;\text{ e }\; |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta = \dfrac{1}{n}$ construímos duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tais que $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos extrair uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ainda denotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) convergente para $x \in K$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, obtemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para x. Como f é contínua, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x)$. Concluímos que $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$, contrariando $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota 19. O teorema de Cantor equivale a dizer que toda função contínua num conjunto limitado e fechado é uniformemente contínua neste conjunto.

Exemplo 6.17. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Veremos que f é uniformemente contínua em todo o subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Se A for fechado, estamos nas condições do Teorema de Cantor. Suponhamos que A não é fechado e $m = \inf(A)$ e $M = sup(A)$. Consideremos o intervalo $[m, M]$. É um subconjunto fechado limitado de $\mathbb{R}$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, f é contínua em $[m, M]$. Pelo Teorema de Cantor, f é uniformemente contínua nesse intervalo, sendo, portanto, uniformemente contínua em $A \subset [m, M]$.

6.16 Definição. Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *Lipschitz continua* (ou *Lipschitz*, ou *Lipschitziana*) se existe $\alpha > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \;\; \forall x, y \in A.$$

Dizemos que f é *não expansiva* se for lipschitziana para $\alpha = 1$, ou seja, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ e, uma *contração* se existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $|f(X) - f(y)| < \alpha|x - y|$.

Atenção! || Note que se f é uma contração, então f é uniformemente contínua

6.17 Teorema. Se $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, e f é de Lipschitz, então f é uniformemente contínua em A.

Prova: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|, \;\; \forall x, y \in A.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \dfrac{\epsilon}{\delta}$. Então se $x, y \in A$ e $|x - y| < \delta$, temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \leq \alpha\delta = \epsilon,$$

o que mostra que f é uniformemente contínua em A.

Nem toda função uniformemente contínua é de Lipschitz, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 6.18. Seja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \sqrt{x}$. Como $[0, 1]$ é compacto, e g é contínua, então g é uniformemente contínua em $[0, 1]$. Entretanto note que se g fosse de Lipschitz, nós teríamos a existência de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{x} = |g(x) - g(0)| \leq \alpha|x - 0| = \alpha x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \alpha \;\; \forall\, x > 0,$$

um absurdo. Logo g não é de Lipschitz apesar de ser uniformemente contínua em seu domínio.

Exemplo 6.19. A função $f(x) = x^2$ é lipschitziana em $[0, 1]$. De fato,

$$|x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq (|x| + |y|) \cdot |x - y| \leq 2|x - y|, \, \forall x, y \in [0, 1].$$

A função é uniformemente contínua em $[0, 1]$, no entanto, vimos que $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

O fato da função ser uniformemente contínua depende do conjunto. Claro que se uma função for uniformemente contínua num conjunto X é uniformemente contínua em todos os subconjuntos de X.

Capítulo 7

Derivadas

7.1 Derivabilidade e Derivada

Vamos a uma breve introdução, escrita pelo professor Cassio Neri, da UFRJ.

As funções afins (funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $g(x) = ax + b$, sendo a e b constantes, isto é, funções cujos gráficos são retas) são mais simples de serem manipuladas do que outras funções (cujos gráficos não são retas). Por isto, pode ser útil saber se é possível (e em caso afirmativo, de que modo) aproximar uma função qualquer por outra que seja afim. Intuitivamente, dada a função f, queremos encontrar uma função afim g que mais se pareça com f. Vejamos um exemplo que foge um pouco do contexto mas que é suficientemente familiar para auxiliar nossa intuição.

Consideremos a Terra. Durante muitos milhares de anos, pensou-se que a superfície terrestre era plana. A razão é que o planeta era visto de muito perto. Só quando nos afastamos dele, vemos que na realidade a sua superfície é mais parecida com uma esfera do que com um plano. Diz-se que Aristóteles reparou isto vendo a sombra da Terra sobre a Lua durante um eclipse. De certa forma, Aristóteles precisou recorrer à imagem da Terra vista da Lua para poder perceber que a Terra não era plana. Ora, se a Terra parece (ou parecia) plana significa que existe um plano que se parece muito com a Terra, certo? Na verdade, sabemos que não é um plano, mas sim vários planos. Para um habitante de Tóquio, o plano que mais parece com a Terra não é o mesmo que para nós. Isto nos indica que esta noção de aproximação é local, isto é, dependendo do ponto onde nos colocamos percebemos de modo diferente o objeto simples (reta, plano, etc.) que mais parece com o objeto original (curva, esfera, etc.).

Voltando ao caso de uma função real. Dada a função f definida numa vizinhança de x_0 queremos determinar a função afim g, dada por $g(x) = ax + b$, que mais se pareça com f na vizinhança de x_0 (lembre-se que esta semelhança é local, isto é, perto de x_0). Determinar g significa determinar as constantes a e b. Será mais conveniente, modificando a constante b, escrever a função g na forma $g(x) = a(x - x_0) + b$ (convença-se que toda função afim pode ser escrita desta forma).

Como proceder? A resposta depende, é claro, do que se entende por "aproximar uma função". Devemos precisar o que significa g ser a função afim que mais se parece com f na vizinhança de um ponto. É natural de se exigir que a função g satisfaça as seguintes condições:

(i) $g(x_0) = f(x_0)$;

(ii) $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$.

É fácil ver que a primeira condição é equivalente a $b = f(x_0)$. A condição (ii) significa que o erro $r(x) = f(x) - g(x)$ cometido ao aproximar f por g no ponto x fica tão pequeno quanto quisermos bastando para isto tomar x suficientemente próximo de x_0. Substituindo g por sua expressão em (ii) obtemos

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - (a(x - x_0) + f(x_0))] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + a(x - x_0)) = f(x_0).$$

Ou seja, (ii) é equivalente à continuidade de f em x_0. Veja que este resultado (in)felizmente não implica nada sobre a constante a. Será que existe algum valor para a que dê a melhor aproximação?

Fazemos a seguinte definição.

7.1 Definição. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dizemos que f é *derivável* em $x_0 \in A$ se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = 0. \tag{7.1}$$

Esta definição acima difere daquela clássica presente na maioria (senão todos) os livros de Cálculo. A proposição seguinte resolve esta confusão mostrando que as duas definições são equivalentes. A escolha pela Definição 7.1 se deve ao fato que ela pode ser facilmente generalizada para funções de mais variáveis (inclusive infinitas!).

7.2 Proposição. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in A$ se, e somente se, o limite abaixo existe e é finito.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Neste caso, a constante a em (7.1) é única e igual ao limite acima.

Prova: Pelo fato que
$$\frac{f(x)-(f(x_0)+a(x-x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a,$$
temos portanto,
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(f(x_0)+a(x-x_0))}{x-x_0} = 0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a.$$

7.3 Definição. Seja $f : A \to \mathbb{R}$. Se f é derivável em $x_0 \in A$, então a *derivada* de f em x_0 é denotada por $f'(x_0)$ e definida por
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Se f é derivável em todo ponto do seu domínio, então dizemos simplesmente que f é *derivável*. A função f', definida no conjunto dos pontos onde f é derivável, que a cada x associa $f'(x)$ é chamada de *derivada* de f.

Se f é derivável em x_0, então a reta de equação $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é a reta que melhor aproxima o gráfico de f numa vizinhança de x_0. Tal reta é chamada de *reta tangente* ao gráfico de f no ponto x_0.

Exemplo 7.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ com a e b constantes. Perguntamos se f é derivável num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e, no caso afirmativo, quanto vale $f'(x_0)$?

Solução: Determinar se f é derivável em x_0 corresponde a determinar se f pode ser bem aproximada por uma função afim numa vizinhança de x_0. Neste exemplo, f já é afim e portanto pode ser muito bem aproximada por ela mesma. Além disto, sendo a derivada igual ao coeficiente do termo em x da aproximação, temos imediatamente que $f'(x_0) = a$ qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Vamos verificar isto rigorosamente a partir da definição. Temos
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0} = a.$$
Assim, f é derivável em todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ com $f'(x_0) = a$. Em particular, se f é constante $(a = 0)$, obtemos que $f'(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 7.2. Verifique que a função dada por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}(n \in \mathbb{N})$ é derivável em qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ com $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$.

Solução: Como $x^n - x_0^n = (x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})$, temos
$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

Outros exemplos podem ser vistos em qualquer livro de Cálculo I. Vamos admitir conhecidas várias funções e suas derivadas. Em qualquer curso de Análise o enfoque não deve estar no cálculo de derivadas mas sim no estudo rigoroso de suas principais propriedades.

7.2 Propriedades Operatórias

As propriedades operatórias das derivadas são, em sua maioria, consequências imediatas das propriedades análogas sobre limites.

7.4 Proposição. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváveis em $x_0 \in A$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Temos:

(i) $f \pm g$ é derivável em x_0 e $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

(ii) $f \cdot g$ é derivável em x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

(iii) se $g(x_0) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Prova:

(i) Basta notar que

$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

e aplicar a Proposição 5.7, sobre propriedades de limites.

(ii) Como $0 = f(x) \cdot g(x_0) - f(x) \cdot g(x_0)$, veja as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x0}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 5.7, tem-se (ii).

(iii) Como $0 = f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)$, com cálculo análogo obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{f}{g})(x) - (\frac{f}{g})(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\dfrac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right). \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 5.7, conclui-se o resultado.

Perceba! Se no item (ii) da proposição fizermos $f(x) = c \in \mathbb{R}$, então teremos $c \cdot g$ derivável em x_0 e $(c \cdot g)'(x_0) = c \cdot g'(x_0)$;

7.5 Proposição (Regra da Cadeia)**.** Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(A) \subset B$ (segue que $g \circ f$ está bem definida). Se f é derivável em $x_0 \in A$ e g é derivável em $f(x_0) \in B$, então $g \circ f$ é derivável em x_0 e, além disto,

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Prova: Seja $r : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$r(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} - g'(f(x_0)), & \text{se } y \neq f(x_0), \\ 0, & \text{se } y = f(x_0). \end{cases}$$

É imediato que $\lim\limits_{y \to f(x_0)} r(y) = 0 = r(f(x_0))$.

Se $y \in B$ e $y \neq f(x_0)$, então

$$g(y) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0)) \cdot (y - f(x_0)) + r(y) \cdot (y - f(x_0)).$$

Como a equação acima é, trivialmente, verdadeira para $y = f(x_0)$ temos que ela é válida para todo $y \in B$. Fazendo $y = f(x)$ com $x \in A$, $x \neq x_0$, na equação acima e dividindo-a por $x - x_0$, obtemos

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + r(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como f é contínua em x_0 e r é contínua em $f(x_0)$, da Proposição 6.5 obtemos que $\lim\limits_{x \to x_0} r(f(x)) = 0$. Concluímos a demonstração, fazendo $x \to x_0$ na equação acima e usando a Proposição 5.7.

7.6 Proposição. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ invertível. Se f é derivável em $x_0 \in A$ com $f'(x_0) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $f(x_0)$, então f^{-1} é derivável em $f(x_0)$ e, além disto,

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}.$$

Prova: Seja $y_0 = f(x_0)$. Como f é derivável em x_0 temos que $x_0 \in \overline{A - \{x_0\}}$ e, portanto, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{x_0\}$ convergente para x_0. Como f é injetiva temos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset B - \{y_0\}$. Além disto, da continuidade de f segue que $f(x_n) \to y_0$ e, portanto, $y_0 \in \overline{B - \{y_0\}}$.

Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B - \{y_0\}$ convergente para y_0. Vamos mostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

O resultado seguirá da Proposição 5.3.

Definindo $x_n = f^{-1}(y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{x_0\}$ e, como f^{-1} é contínua em y_0, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x_0. Segue que

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Exemplo 7.3. Vimos que a função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \geq 0$ tem inversa contínua. Como a derivada de f só se anula em 0, a proposição anterior implica que f^{-1} é derivável em $f(x)$ se $x > 0$, ou seja, f^{-1} é derivável em $(0, +\infty)$. Além disto, em $y = f(x) > 0$, a derivada de f^{-1} é dada por

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Nota 20. De modo geral, seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então f tem inversa $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, e $g(y) = \sqrt[n]{y}$. Para $y > 0$ temos então

$$g'(y) = \frac{1}{n \cdot y^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Note que g não é diferenciável no zero pois $f'(0) = 0$.

Exemplo 7.4. Seja $f : [0,1) \cup [2,3] \to [0,2]$ definida por $f(x) = x$, se $x \in [0,1)$ e $f(x) = x - 1$, se $x \in [2,3]$. Temos que f é derivável com $f'(x) = 1$ para todo x no domínio de f. No final da seção 6.1, deixamos um exercício para verificar que f é uma bijeção com inversa descontínua em 1. Portanto, f^{-1} não é derivável em 1.

7.3 Extremos Locais e o Teorema do Valor Médio (Lagrange)

Veremos a seguir como a derivada pode ser útil na determinação de extremos locais (e a posteriori de extremos globais). O resultado importante neste sentido é o Teorema dos Extremos Locais.

Além de ser um resultado de uso bastante prático ele também tem importância teórica. Por exemplo, usaremos o Teorema dos Extremos Locais para demonstrar o Teorema do Valor Médio (ou de Lagrange). Este último é um dos teoremas mais fundamental da Análise Real.

7.7 Definição. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $x_0 \in A$ é um *ponto de máximo local* de f se x_0 é ponto de máximo de f na interseção de A com uma vizinhança de x_0. Mutatis mutandis define-se *ponto de mínimo local* e ponto de *extremo local* (veja a Definição 6.12).

Atenção! || Todo extremo global é extremo local.

7.8 Teorema (Dos Extremos Locais)**.** Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in A$ é um extremo local de f tal que $x_0 \in \operatorname{int} A$ e f é derivável em x_0, então $f'(x_0) = 0$.

Prova: Suponhamos que x_0 é um ponto de máximo local de f.

Como x_0 é ponto de máximo local no interior de A, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$, então $x \in A$ e $f(x) \leq f(x_0)$. Portanto, para $x_0 < x < x_0 + \delta$ temos $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Segue que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Por outro lado, para $x_0 - \delta < x < x_0$ temos $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Portanto,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

A demonstração é análoga para ponto de mínimo local.

Como dissemos anteriormente, o Teorema dos Extremos Locais é útil na determinação dos extremos globais de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De fato, temos as seguintes implicações:

$$\left.\begin{array}{r} x_0 \text{ é extremo global} \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ é extremo local} \\ x_0 \in \operatorname{int} A \text{ e } f \text{ é derivável em } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

Desta forma, se x_0 é extremo global, então x_0 pertence a algum dos três conjuntos abaixo:

- $\diamond$ $\{x \in \operatorname{int} A; f$ é derivável em x e $f'(x) = 0\}$,
- $\diamond$ $A \setminus \operatorname{int} A$,
- $\diamond$ $\{x \in \operatorname{int} A; f$ não é derivável em $x\}$.

Exemplo 7.5. Seja $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x-1|(5-x)$ para todo $x \in [0,4]$. Como f é contínua e $A = [0,4]$ é compacto, f tem extremos globais. Vamos determiná-los. Temos que

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)(5-x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)(5-x), & \text{se } 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Segue que f é derivável em todo ponto $x \in A - \{1\}$ (verifique). Além disto,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-6, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 6-2x, & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Assim, todo extremo global pertence a algum dos três conjuntos abaixo:

- $\diamond$ $\{x \in \operatorname{int} A; f$ é derivável em x e $f'(x) = 0\} = \{3\}$,
- $\diamond$ $A \setminus \operatorname{int} A = \{0,4\}$,
- $\diamond$ $\{x \in \operatorname{int} A; f$ não é derivável em $x\} = \{1\}$.

Uma simples verificação nos dá $f(0) = 5$, $f(1) = 0$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 3$. Portanto, 0 é o ponto de máximo global e 1 é o ponto de mínimo global de f.

7.9 Teorema (Do Valor Médio)**.** Se $f \in C([a,b])$ (com $a < b$) é derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Prova: Considere a função g definida sobre o compacto $[a,b]$ dada por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Temos que $g \in C([a,b])$ e g é derivável em (a,b) com

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Para terminar a demonstração basta mostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Observamos inicialmente que $g(a) = g(b) = 0$. Se g for constante, então não há mais nada a ser demonstrado. Suponhamos que g não seja constante.

Pelo Teorema de Weierstrass, g tem extremos globais em $[a,b]$. Como g não é constante, um destes extremos, denotado c, é tal que $g(c) \neq g(a) = g(b)$ e portanto $c \in (a,b)$. Do Teorema dos Extremos Locais segue que $g'(c) = 0$.

7.10 Corolário (Teorema de Rolle)**.** Se $f \in C([a,b])$ (com $a < b$) é derivável em (a,b) com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Uma interessante aplicação do Teorema do Valor Médio garante que se uma função definida num intervalo tem derivada identicamente nula, então a função é constante.

7.11 Corolário. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$, onde $a < b$, e diferenciável em (a,b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$, então f é constante em $[a,b]$.

Observe que pelo resultado acima, se f, g são funções diferenciáveis que tem a mesma derivada no intervalo I, então f e g diferem por uma constante, isto é,

$$\text{Se } f'(x) = g'(x),\ \forall\, x \in I, \text{ então } f(x) - g(x) = K \in \mathbb{R}.$$

Prova: Seja $a < x < b$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a, x)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Como $f'(c) = 0$, temos $f(x) = f(a)$. Como x é arbitrário, temos f constante em (a, b). Logo temos f constante em $[a, b]$.

Importante! A função $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, não é constante, embora cumpra $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. O motivo é que o domínio de f não é um intervalo.

7.12 Corolário. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f, g \in C^0(I)$, deriváveis em int I. Temos:

(i) se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \text{int } I$, então f é crescente;

(ii) se $f'(x) > 0$ para todo $x \in \text{int } I$, então f é estritamente crescente;

(iii) se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in \text{int } I$, então f é decrescente;

(iv) se $f'(x) < 0$ para todo $x \in \text{int } I$, então f é estritamente decrescente;

(v) se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \text{int } I$, então $f - g$ é constante.

Prova: Provemos (i). Sejam $a, b \in I$ com $a < b$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a $f\big|_{[a,b]}$, obtemos que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0.$$

Segue que $f(b) \geq f(a)$. Portanto, f é crescente.

Os itens (ii), (iii) e (iv) são análogos ao item (i); e o item (v) basta aplicar o Corolário 7.11 à função $f - g$.

Nota 21. Não é verdade que se $f'(c) > 0$ para algum ponto c no domínio de f implique em f crescente numa vizinhança de c. Como exemplo considere

$$g(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

que é diferenciável em zero com $g'(0) = 1$, mas não é crescente em nenhuma vizinhança do zero.

Outra aplicação do Teorema do Valor Médio segue no exemplo abaixo.

Exemplo 7.6. Seja $f(x) = e^x$. Então $f'(x) = e^x$. Mostre que $e^x > 1 + x$ para todo $x \neq 0$.

Solução: Seja $x > 0$. Então aplicando o Teorema do Valor Médio em $[0, x]$ temos que existe $c \in (0, x)$ tal que

$$e^x - e^0 = e^c(x - 0).$$

Como $c > 0$, então $e^c > e^0 = 1$, donde

$$e^x > 1 + x.$$

Para $x < 0$, os argumentos são semelhantes.

Nota 22.

◇ Esse simples exemplo (acima), nos permite mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$. Vejamos. Temos $e^{\frac{x}{n+1}} > 1 + \dfrac{x}{n+1} > \dfrac{x}{n+1}$ se $x > 0$. Elevando à potência $n+1$ e escrevendo $A = (n+1)^{n+1}$, obtemos

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{A}, \quad \text{donde} \quad \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{A}, \quad \text{ou} \quad \frac{x^n}{e^x} < \frac{A}{x}.$$

O resultado segue-se.

◇ De modo geral, concluímos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{p(x)}{e^x} = 0$, para todo polinômio p. De fato, se $a_n x^n$ é o termo de mais alto grau de p, sabe que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{p(x)}{x^n} = a_n$. Logo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{x^n} \cdot \frac{x^n}{e^x} = a_n \cdot 0 = 0.$$

7.13 Corolário. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, tem-se

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|.$$

Solução: Dados $x, y \in I$, f é contínua no intervalo fechado cujas extremidades são x e y e é derivável no intervalo aberto correspondente. Logo, $f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y)$, em que c é um ponto entre x e y. Como $f'(c) \leq k$, vem

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq k \cdot |x - y|.$$

Veja! A função que possui sua derivada limitada num intervalo aberto é lipschitziana, e portanto uniformemente contínua.

Em particular, se $I = (a, b)$, existem $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Exemplo 7.7 (Contra-Exemplo)**.** A função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, não possuindo limite á direita no ponto 0, tem derivada ilimitada em qualquer intervalo do tipo $(0, \delta)$. Sabemos que, para $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Nota 23. Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), segue-se por passagem ao limite que a desigualdade $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$ ainda é válida para $x, y \in [a, b]$, desde que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$.

7.14 Corolário. Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ então existe $f'_+(a)$ e vale $f'_+(a) = L$

Prova: Basta mostrar que, dada arbritariamente uma sequência de pontos $x_n > a$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = L$. Ora, pelo teorema do valor médio, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe y_n, com $a < y_n < x_n$, tal que

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(y_n).$$

É evidente que $y_n \to a$. Logo $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(y_n) = L$, o que fornece o resultado desejado.

Evidente, um enunciado análogo é válido para o limite à esquerda.

7.15 Corolário.

O teorema que segue, é uma "generalização" do Teorema do Valor Médio.

7.16 Teorema (De Cauchy)**.** Se $f, g \in C([a,b])$ (com $a < b$) são deriváveis em (a,b) e g' não se anula em (a,b), então $g(a) \neq g(b)$ e existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Prova: Observamos inicialmente que $g(a) \neq g(b)$, pois senão, pelo Teorema de Rolle, g' se anularia em algum ponto de (a,b). Considere a função h, definida sobre $[a,b]$, dada por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right).$$

É fácil ver que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, logo existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$, ou seja,

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0.$$

Daí segue imediatamente o resultado.

Dizemos que o Teorema de Cauchy é uma "generalização" do Teorema do Valor Médio. Mas observe que na sua demonstração, usamos o Teorema de Rolle que aparecia como caso particular do Teorema do Valor Médio. Ou seja, mostramos as seguintes implicações:

Teorema do Valor Médio

$\Downarrow$

Teorema de Rolle

$\Downarrow$

Teorema de Cauchy

$\Downarrow$

Teorema do Valor Médio

Portanto estes três resultados são equivalentes.

7.4 Regras de L'Hospital

7.17 Proposição (Regra de L'Hospital "0/0")**.** Sejam f e g funções deriváveis em (a,b). Se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, g' não se anula em (a,b) e existe $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito ou não), então existe $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prova: Como $\lim x \to a^+ f(x) = 0$, modificando ou estendendo f, se necessário, podemos supor que $f(a) = 0$. Analogamente, $g(a) = 0$. Desta forma f e g são contínuas em $[a,b)$.

Seja $x \in (a,b)$. Aplicando o Teorema de Cauchy às funções f e g sobre o intervalo $[a,x]$, encontramos $y \in (a,x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

O resultado segue da igualdade acima observando que $y \to a^+$ quando $x \to a^+$.

A proposição também é válida quando no seu enunciado substituímos $x \to a^+$ por $x \to b^-$. Da mesma forma, a Regra de L'Hospital vale para limites do tipo $x \to a$. A seguir veremos o caso em que $x \to +\infty$ (o caso $x \to -\infty$ é análogo).

7.18 Corolário. Sejam f e g funções deriváveis em $(a,+\infty)$. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g' não se anula em $(a,+\infty)$ e existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito ou não), então existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prova: Considere a função F definida sobre um intervalo $(0,b)$ por $F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$. Analogamente definimos $G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right)$. Os seguintes fatos são de verificação imediata:

(i) F e G são deriváveis com $F'(y) = \dfrac{-f'\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$ e $G'(y) = \dfrac{-g'\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$ (segue que G' não se anula);

(ii) $\lim\limits_{y\to0^+} F(y) = \lim\limits_{y\to0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

(iii) $\lim\limits_{y\to0^+} G(y) = \lim\limits_{y\to0^+} g\left(\frac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y\to0^+} g(x) = 0$;

(iv) $\lim\limits_{y\to0^+} \dfrac{F'(y)}{G'(y)} = \lim\limits_{y\to0^+} \dfrac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim\limits_{y\to0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pela proposição anterior, $\lim\limits_{y\to0^+} \dfrac{F(y)}{G(y)} = \lim\limits_{y\to0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Então

$$\lim_{y\to0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to0^+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to0^+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

7.19 Proposição (Regra de L'Hospital "∞/∞")**.** Sejam f e g funções deriváveis em (a,b). Se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, g' não se anula em (a,b) e existe $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito ou não), então existe $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A proposição também é válida nos casos $x \to b^-$ e $x \to a$. Abaixo veremos o caso em que $x \to +\infty$ (analogamente, o caso em que $x \to -\infty$).

7.20 Proposição. Sejam f e g funções deriváveis em $(a,+\infty)$. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, g' não se anula em $(a,+\infty)$ e existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, então existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3ª edição, revisada e ampliada. Edgard Blücher, São Paulo. 2006;

[2] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, VOL. 1. Coleção Matemática Universitária. 10ª edição. IMPA, Rio de Janeiro. 2008;

[3] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**, VOL. 1. 12ª edição. IMPA, Rio de Janeiro. 2007;

[4] MALTA, Iaci; PESCO, Sinésio & LOPES, Hélio. **Cálculo a uma variável**: uma introdução ao cálculo. VOL. 1. Ed. PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2002;

[5] FARIA, Isabel; MESQUITA, Ana Isabel & CADIMA, Jorge. **Apontamentos de Análise Matemática I**. Instituto Superior de Agronomia. Universidade Técnica de Lisboa. 2005.

Texto composto em LaTeX 2$_\varepsilon$, APC, 25 de setembro de 2009